



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE MÉXICO

Licenciatura en Física

**“Dinámica de Solitones en la Ecuación
Cúbica-Quinta de Schrödinger”**

TESIS

Para obtener el grado de:

FÍSICO

Presenta:

MAXIMINO PÉREZ MALDONADO

Directores de Tesis:

Dra. María Guadalupe Frías Palos
Dr. Máximo A. Agüero Granados

Índice general

1. Introducción	3
2. Ecuación NLS en un pulso Óptico	7
2.1. Ley de No-linealidad de Kerr	7
2.1.1. Ley de Kerr en la Ecuación NLS	8
2.2. Ondas Viajeras	13
3. Ecuación No-lineal de Schrödinger	15
3.1. Clasificación de la No linealidad	16
3.2. Solución de la Onda Solitónica	18
3.3. Solución de una Onda Viajera en un medio Kerr	22
4. Ecuación Cúbica-Quinta de Schrödinger	24
4.1. Ley de No-Linealidad Parabólica	24
4.1.1. Aplicación de la Ley Parabólica	26
4.2. Onda viajera en la ECQNLS	26
4.3. Generalización de la ECQNLS	28
5. Solitones grises en una Fibra Óptica en la ECQNLS	30
5.1. Solución de una Onda Solitónica en la ECQNLS	31
5.2. Solitones Grises en la ECQNLS	32
5.2.1. Parametrización de la ECQNLS	32
5.2.2. Solución para un-soliton gris	37
5.2.3. Solución para dos-solitones grises	38
5.2.4. Solución para tres-solitones grises	40
5.3. Fase de Un solitón Gris	41
5.4. Clasificación de la Interacción Solitónica	43
6. Conclusiones	46

Capítulo 1

Introducción

En principios del siglo XX los fenómenos no lineales fueron estudiados en sistemas mecánicos, en la actualidad podemos encontrar este tipo de fenómenos en varias ramas de la ciencia y tecnología, por ejemplo en sistemas electromagnéticos, químicos, cosmológicos, etc. De manera general, es estudiar el caso que se presenta dentro de la electrodinámica no lineal como es el estudio de la Ecuación Cúbica-Quinta No-Lineal de Schrödinger, para describir este tipo de fenómenos.

Como es conocido tenemos que para sistemas lineales que tienen movimiento ondulatorio, en un paquete de onda que inicialmente está bien formado, con el transcurso del tiempo se va deteriorando, característica que se debe a la dispersión de sus componentes [1,2].

Sin embargo para resolver este problema, en el estudio de ondas no lineales en sistemas dispersivos se muestra que la ecuación de Schrödinger, para sistemas de ondas que tienen una aproximación lineal, de ondas planas de alta frecuencia, la ecuación de onda unidimensional en campos lejanos es genérica. Por lo que esta ecuación se puede resolver bajo condiciones de valor inicial aplicando una transformación inversa de dispersión [1].

Por regla general existen algunas ondas solitarias que son estables a la dispersión; lo cual es debido a que su deterioro paulatino de onda solitaria, que es compensado por la tendencia que tienen sus componentes a juntarse, gracias a los términos no lineales de la ecuación de campo [2].

Sabemos que para sistemas no lineales, se usa un concepto que sirve para describir una onda solitaria que emerge de alguna interacción, sin que exista un cambio de velocidad y forma, este fenómeno se describe como "Solitón"; esta palabra fue introducida por Zabusky y Kruskal, para la descripción del mismo [3].

Evidentemente sabemos que dentro de la literatura existen definiciones muy variadas del concepto de "Solitón"; pero tomamos la definición más acertada que define al "Solitón" como una configuración de campo distinto del vacío; que es una solución de la ecuación no lineal localizada en el espacio y con

energía finita [3].

De esta manera tenemos que para describir esta ecuación existen soluciones multisolitónicas que juegan un papel muy importante para la descripción de algunos fenómenos utilizados en óptica no lineal; donde un método analítico muestra que las ondas solitónicas estables tienen soluciones espaciales que describen múltiples colisiones de solitones [2].

Si hacemos un recuento histórico de la descripción de este fenómeno, tenemos que mencionar que, uno de los logros más notables que se ha conseguido en la segunda mitad del siglo XX y que además ilustra con claridad la Física No Lineal es la "Teoría de Solitones", debido a que los solitones son ondas no lineales que exhiben un comportamiento inesperado, ondas solitarias que se propagan sin deformarse.

La existencia de ondas solitónicas fue descubierta por un ingeniero escocés llamado John Scott Russell, quien llamaba a estas ondas "ondas de translación", su afirmación fue realizada cuando, observaba un bote, que era jalado rápidamente sobre un canal regularmente estrecho de agua [9].

Después de presentar su trabajo ante la Asociación Británica, Airy y Stockes argumentaron que esta onda no era permanente debido a la disminución de la misma. Así posteriormente fue hasta a mediados de 1960, cuando se estudio la propagación de ondas no lineales, donde se apreció la aportación de Russell que vio el comportamiento de la onda solitaria como una entidad dinámica que mostraba propiedades de una partícula; lo cual en física desde la perspectiva moderna es usado como un elemento constructivo para formular comportamientos dinámicos complejos de sistemas de ondas [5].

Russell estaba tan entusiasmado por este fenómeno que trato de explicar muchas cosas en el universo de la misma forma. Pero lo más importante, fue que hizo experimentos, recreando estas "grandes olas solitarias" en su laboratorio. Sin embargo no fue sino hasta 61 años después, que los teóricos, Korteweg y de Vries, lograron obtener la ecuación que explicaba los experimentos de Russell [4].

Estrictamente, esta ecuación de Korteweg de Vries (KdV) describe a los solitones si, tienen la propiedad de conservar su identidad (velocidad y forma) en colisiones (elásticas). Resulta que esta propiedad está relacionada con la integrabilidad del sistema, apareciendo muy raramente en sistemas no-integrables (como la ecuación de difusión no-lineal) [5].

Para algunas ecuaciones no lineales con dispersión, es posible que exista una reducción de la anchura de impulso, la cual se da debido a la no linealidad que se equilibra exactamente por la ampliación de la anchura debido a la dispersión [10].

Por otra parte, en 1971 en la Academia de Ciencias de la URSS, los investigadores Zakarov Vladimir Euguenievich y Shabat Aleksei Borisovich, encontraron que las soluciones solitónicas a la ecuación que hoy en día se conoce como la Ecuación No-Lineal de Schrödinger (NLS) [9]. Donde las soluciones solitónicas de la ecuación NLS describe los fenómenos con una débil y una fuerte no linealidad dis-

persada, como las olas en aguas profundas, láseres auto-centrados en dieléctricos, la propagación de señales en fibras ópticas, imanes 1D Heisenberg, y vórtices en el flujo de fluidos, etc [4].

También con esta contribución, se obtiene la presencia de solitones grises y su interacción mutua en el marco de la llamada Ecuación Cúbica-Quinta No Lineal de Schrödinger (ECQNLS) en dos dimensiones espacio-tiempo con las coordenadas (r,t) . Donde se puede usar una solución solitónica de la Ecuación de Boussineq (EB)(ecuación con dispersión negativa)[1,26], para la ECQNLS la cual es construida de uno, dos y tres solitones grises. Presentando la interacción elástica e inelástica de estos solitones.

De esta forma se producen métodos para dar solución a este tipo de problemas, donde se pretenden desarrollar técnicas para encontrar las soluciones especiales a las ecuaciones fundamentales [1,4]. El científico Hirota ha hecho contribuciones muy significativas, el cual propone introducir una transformada dependiente de las variables, que debe reducir la ecuación de evolución a una ecuación bilineal [1,11].

Otro de los métodos más usados para la solución de estas ecuaciones es el método de dispersión inversa, el cual fue inventado por Gardner en 1967 el cual resuelve la ecuación KdV. Posteriormente en 1968 Lax dio una formula más general de este método. De igual manera en 1971 Zakharov y Shabat usando este método resolvieron la ecuación NLS y en 1973 Ablowitz resolvió la ecuación sG (seno-Gordon), usando el mismo método [4].

Dentro de los campos no lineales, la óptica no lineal ha crecido recientemente, ya que particularmente en el caso de solitones y otro tipo de transmisión de pulsos no lineales; son propagados a través de fibras ópticas, como es el caso de la luz, o series largas de datos de muy alta capacidad sin dispersión en las comunicaciones [7,13]. De tal forma que un soliton puede propagarse a lo largo de una fibra óptica sin cambiar de forma, y por lo tanto puede considerarse como un trozo natural de información. Donde una característica de este tipo de ondas es que tienen un perfil inicial en forma de pulso, que se compone de una superposición de ondas planas con diferente número de onda k . Esto se debe a que cada una de las ondas planas superpuestas viajan con la misma velocidad. Entonces las ondas tienen forma inalterable y juegan un papel muy importante en aplicaciones de los medios de comunicación. Aunque los solitones no sean ondas no dispersivas, poseen la propiedad de tener una forma invariable y, por ello, deben tener aplicaciones prácticas [11].

Por otra parte, haciendo mención del desarrollo de la tesis, esta consta de seis capítulos, los cuales están divididos de la siguiente manera: el Capítulo 1 es la presente Introducción, en el que, como se sabe, se da un análisis semidesarrollado del tema a tratar, en nuestro caso se hace un recuento del surgimiento de los solitones y se menciona como se introdujo en el campo de la Física No-Lineal; el Capítulo 2, nos indica la forma en que se encuentra la Ecuación No-Lineal de Schrödinger en un pulso óptico, siendo obtenida a través de la ecuación de no linealidad de Kerr, donde esta expresión es caracterizada por la polarización del pulso óptico y su campo eléctrico, además que se manifiesta como esta dada la susceptibilidad del medio Kerr debido a la polarización; también se propone una

solución para una onda viajera dada la Ecuación No-Lineal de Schrödinger.

Dentro del Capítulo 3 se hace un análisis de la Ecuación No-Lineal de Schrödinger y se clasifica esta ecuación de acuerdo a como se puede encontrar dentro de una función no lineal; de igual manera que en el capítulo anterior se hace un análisis de una onda viajera dentro de la ecuación y se propone un método de solución utilizando una función Anzats y nos da un posible resultado.

Posteriormente, en el Capítulo 4 se hace mención de una ampliación de la Ecuación NLS, la cual contiene términos de alto orden de tipo Kerr, esta ampliación se denomina Ley de No-Linealidad Parabólica o también conocida como Ecuación Cúbica-Quinta No-Lineal de Schrödinger (ECQNLS). Aquí se hace una caracterización de la No-Linealidad a través del índice de refracción de un medio, que en nuestro caso, es para una fibra óptica. Como el objetivo de la tesis es observar la Dinámica de los solitones, al igual que en los capítulos anteriores se observa el comportamiento de una onda viajera dentro de la ecuación ahora propuesta la ampliación ya mencionada, y se hace una generalización de la solución para la ECQNLS.

En el Capítulo 5, se hace mención de como encontrar una solución en la ECQNLS, y se hace un desarrollo para encontrar soluciones solitónicas dentro de la misma ecuación, teniendo como meta encontrar soluciones, que nos arrojen solitones grises dentro del desarrollo, aquí se encuentra la solución para uno, dos y tres solitones grises; también se menciona como es la fase para estos solitones y se da una clasificación de la interacción solitónica.

Por último, en el Capítulo 6 se dan las conclusiones de los resultados obtenidos desarrollados dentro de la tesis.

Capítulo 2

Ecuación NLS en un pulso Óptico

Existen diversos modelos que estudian solitones. De manera que en este capítulo se analizara la ecuación no lineal que describe la propagación de un pulso óptico en una fibra óptica de alto orden, esta ecuación también es llamada ecuación No-lineal de Schrödinger (NLS).

La ecuación NLS aparece en varias áreas de la física, en donde las ecuaciones diferenciales correspondientes describen la propagación de ondas no lineales en medios dispersivos. Tal es el caso de la teoría ferromagnética [2], de la hidrodinámica nuclear con la fuerza de Skyrme [3], de la física del plasma [4] y de las partículas elementales [5]. Además este modelo se extiende a la fenomenología de las transiciones de fase [6,7] mediante métodos de estados coherentes [8], óptica no lineal [9] y estudio de sistemas biológicos [10].

Principalmente se analizara la ley de No-linealidad de Kerr, para así la cual describe los aspectos detallados de óptica de solitones que como se menciono anteriormente se rigen por la ecuación cúbica no-lineal de Schrödinger (NLS) que es también conocida como ley de No-linealidad de Kerr.

2.1. Ley de No-linealidad de Kerr

La ley de No-linealidad de Kerr se origina cuando una onda de luz en una fibra óptica no lineal se enfrenta a las respuestas de un movimiento no-armónico de los electrones que rodean una molécula, causada por un campo eléctrico externo. A pesar de que la respuesta no lineal es extremadamente débil, sus efectos aparecen en diversas formas a través de largas distancias de propagación que se miden en términos de la longitud de onda de la luz.

El origen de la respuesta no-lineal se relaciona con el movimiento de la envolvente no-armónica de electrones bajo la influencia de un campo aplicado. Como resultado de ello, la polarización inducida (P) es no lineal en el campo eléctrico E , esto implica que el campo eléctrico queda en términos de orden superior de la amplitud [16-18], entonces la polarización toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
P = \epsilon_0 \quad & [\int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - \tau)E(\tau)d\tau + \iint_{-\infty}^{\infty} \chi^{(2)}(t - \tau_1)\chi^{(2)}(t - \tau_2) \\
& E(\tau_1)E(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \iiint_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t - \tau_1)\chi^{(3)}(t - \tau_2) \\
& \chi^{(3)}(t - \tau_3)E(\tau_1)E(\tau_2)E(\tau_3)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 + \dots] \quad (2.1)
\end{aligned}$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío y $\chi^{(j)}$, para $j = 1, 2, \dots$ es el tensor j th de susceptibilidad de rango $j + 1$, que representa los efectos de polarización de la luz. La susceptibilidad lineal, $\chi^{(1)}$, da el índice de refracción lineal n_0 y el coeficiente de atenuación. El segundo orden de susceptibilidad, $\chi^{(2)}$, es responsable de la generación del segundo de armónico. Entonces, las fibras ópticas no presentan normalmente efectos no lineales de segundo orden, aunque los momentos del cuadrupolo- eléctrico y el dipolo-magnéticos puede generar efectos de segundo orden no lineal débiles. El menor efecto no-lineal en fibras no-lineales se origina principalmente del tercer orden de susceptibilidad, $\chi^{(3)}$. Una onda de luz con frecuencia ω ve respuesta no lineal del termino $\chi^{(3)}$ a través de la interacción de $\omega, -\omega$, y los componetes de ω . La respuesta no lineal contribuye a la modificación del índice de refracción [17,19,20].

$$n(\omega, |E|^2) = n_0(\omega) + n_2(\omega)|E|^2 \quad (2.2)$$

donde E es la amplitud del campo eléctrico de la onda y n_2 esta relacionado con $\chi^{(3)}$ a través de

$$n_2(\omega) = \frac{3}{8n_0}\chi_{xxx}^{(3)} \quad (2.3)$$

para una onda linealmente polarizada en la dirección x . Aquí n_0 es el índice de refracción lineal del medio y el índice de refracción no lineal n_2 es llamado coeficiente Kerr y tiene un valor de unos $10^{-22}m^2/W$ para las fibras de silicio. A pesar de que la no linealidad de la fibra es pequeña, la acumulación de efectos no lineales a través de largas distancias puede tener un impacto significativo debido a la alta intensidad de la onda de luz sobre una pequeña sección transversal de fibra. Dado que el efecto Kerr aquí se origina en el movimiento no-armónico de los electrones rodeando las moléculas, y se satisface la respuesta instantánea de (2,3). En una fibra, la magnitud del campo eléctrico varía en su sección transversal, por lo tanto, un buen promedio de $|E|^2$ debe tenerse en cuenta a la hora de evaluar la respuesta. Por sí misma, la No-linealidad de Kerr produce una intensidad dependiente del cambio de fase resultados de la ampliación del espectro en la propagación.

2.1.1. Ley de Kerr en la Ecuación NLS

En esta parte se va a derivar la ecuación dinámica de un pulso óptico propagandose a través de una fibra óptica, en donde se aplica la no-linealidad de la Ley de Kerr. Primero definimos el campo eléctrico $\bar{E}(\bar{r}, t)$, que esta gobernado por la ecuación

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{E}(\bar{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{P}(\bar{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}(\bar{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.4)$$

donde $\bar{P}(\bar{r}, t)$ es la polarización inducida en el medio, μ_0 es la permeabilidad del vacío, y c es la velocidad de la luz. Donde la polarización inducida consta de dos partes, una parte lineal de la forma $\bar{P}_L (= \epsilon_0 \chi^{(1)} \bar{E})$ y la parte no lineal que es P_{NL} ; con ϵ_0 es la permitividad del vacío y $\chi^{(1)}$ es la susceptibilidad lineal. De tal manera que el pulso óptico toma la forma:

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \frac{1}{2} \bar{x} [\bar{E}(\bar{r}, t) e^{i\omega_0 t} + CC] \quad (2.5)$$

$$\bar{P}_L(\bar{r}, t) = \frac{1}{2} \bar{x} [\bar{P}_L(\bar{r}, t) e^{i\omega_0 t} + CC] \quad (2.6)$$

$$\bar{P}_{NL}(\bar{r}, t) = \frac{1}{2} \bar{x} [\bar{P}_{NL}(\bar{r}, t) e^{i\omega_0 t} + CC] \quad (2.7)$$

siendo ω_0 la frecuencia que lleva la onda de luz, \bar{x} es el vector unitario de polarización, y $\bar{E}(\bar{r}, t)$, $\bar{P}_L(\bar{r}, t)$ y $\bar{P}_{NL}(\bar{r}, t)$ son pequeñas variaciones de las funciones de tiempo [14]. También se representa en las ecuaciones anteriores el término CC que es el complejo conjugado. Para las fibras ópticas se representa el primer término de (2.4) como una aproximación de la forma:

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{E}(\bar{r}, t) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{E}(\bar{r}, t)) - \nabla^2 \bar{E}(\bar{r}, t) \approx -\nabla^2 \bar{E}(\bar{r}, t) \quad (2.8)$$

por lo que la ecuación (2.4) se reduce a

$$\nabla^2 \bar{E}(\bar{r}, t) - \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{P}(\bar{r}, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}(\bar{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

Para este estado es necesario reducir esta ecuación una vez más; diciendo que la parte lineal de la polarización depende de la frecuencia, mientras que la parte no-lineal no lo hace. Sin embargo son considerados los medios para los cuales la respuesta no-lineal es instantánea. Entonces la polarización no lineal en fibras ópticas, con la oscilación ω_0 tiene la forma

$$\bar{P}_{NL}(\bar{r}, t) = \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} |E|^2 \bar{E}(\bar{r}, t) \quad (2.10)$$

Ya teniendo ecuación anterior se define una transformada de Fourier para $\bar{E}(\bar{r}, t)$ de la siguiente manera

$$\bar{E}(\bar{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(\bar{r}, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \quad (2.11)$$

De forma que si se hace que la susceptibilidad de la parte no-lineal como una constante, la transformada de Fourier de (2.9) es

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \bar{E}(r, \omega - \omega_0) \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} [1 + \chi^{(1)}(\omega - \omega_0)] \bar{E}(r, \omega - \omega_0) \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} [\frac{3}{4} \chi^{(3)} |\bar{E}|^2] \bar{E}(r, \omega - \omega_0) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

La frecuencia dependiente del número de onda k se define por

$$k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} [1 + \chi^{(1)}(\omega - \omega_0)] \quad (2.13)$$

Expandiendo la ecuación (2.13) en una serie de Taylor para k^2 sobre la frecuencia portadora ω_0 tenemos

$$k^2 = k_0^2 + 2(\omega - \omega_0)k_0k_0' + (\omega - \omega_0)^2(k_0')^2 + (\omega - \omega_0)^2k_0k_0'' \quad (2.14)$$

de manera que las primadas muestran las derivadas con respecto de ω y evaluadas en ω_0 tal que

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{1 + \chi^{(1)}(\omega_0)} \quad (2.15)$$

También k_0' es el inverso de la velocidad de grupo v_g , mientras que k_0'' es la dispersión de la velocidad de grupo. Para la dispersión normal $k_0'' > 0$, mientras que para dispersión anomala $k_0'' < 0$. Si remplazamos la ecuación (2.14) en (2.12) entonces la transformada de la ecuación en terminos del tiempo da

$$\nabla^2 E + k_0^2 E + 2ik_0k_0' \frac{\partial E}{\partial t} - (k_0')^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - k_0k_0'' \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{3}{4}\chi^{(3)} \frac{\omega_0^2}{c^2} |E|^2 E = 0 \quad (2.16)$$

Escogiendo un Ansatz de la forma $E(\bar{r}, t) = A(\bar{r}, t)e^{ik_0z}$, donde el escalar sobre $A(\bar{r}, t)$ de los pulsos ópticos, varía lentamente a lo largo de un período óptico, se puede introducir una aproximación que varía lentamente como

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} < \omega_0 \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.17)$$

y

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} < k_0 \frac{\partial A}{\partial z} \quad (2.18)$$

Ya una vez definido el Ansatz se sustituye en $E(r, t)$ y emplenado la ligera variación de la aproximación tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 A + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2ik_0k_0' \frac{\partial A}{\partial t} - k_0k_0'' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \\ - (k_0')^2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{3}{4}\chi^{(3)} \frac{\omega_0^2}{c^2} |A|^2 A = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

siendo ∇_{\perp}^2 el laplaciano perpendicular. Si cambiamos a un marco donde el pulso se mueve con una velocidad de grupo v_g e introduciendo las siguientes transformaciones

$$z' = z \quad (2.20)$$

y

$$t' = t - \frac{x}{v_g} = t - zk'0 \quad (2.21)$$

haciendo esto da

$$\nabla_{\perp}^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + k_0 k_0'' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} \frac{\omega_0^2}{c^2} |A|^2 A = 0 \quad (2.22)$$

Donde el segundo termino es mucho menor debido a que la variación es muy ligera. Por lo tanto (2.22) puede ser modificada como

$$\nabla_{\perp}^2 A + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + k_0 k_0'' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} \frac{\omega_0^2}{c^2} |A|^2 A = 0 \quad (2.23)$$

Considerando solo la parte lineal de la ecuación anterior, el cuarto término es despreciado, por lo tanto se llega a

$$A(r, t) = R(r)Q(z, t)e^{i\delta x} \quad (2.24)$$

donde $R(r)$ es el componente transversal y δ es el eigen-valor correspondiente que satisface a

$$\nabla_{\perp}^2 R(r) + 2\delta k_0 R = 0 \quad (2.25)$$

Por la ecuación no-lineal (2.23), tenemos que (2.25) aun mantiene la estructura del componente transversal de la propagación del pulso transversal. De manera, que si combinamos la ecuación (2.24) en (2.23) y empleamos la característica de (2.25) tenemos que:

$$i \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{k_0''}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{\omega}{c} n_2 |R|^2 |Q|^2 Q = 0 \quad (2.26)$$

De modo que si promediamos esta ecuación sobre un corte transversal en la fibra tenemos

$$i \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{k_0''}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{\omega}{c} n_2 \alpha |Q|^2 Q = 0 \quad (2.27)$$

donde

$$\alpha = \frac{\int |R|^4 dr}{\int |R|^2 dr} \quad (2.28)$$

El valor numérico de α dependen de la forma de $R(r)$. Si se toma un medio anómalo considerando $k_0'' < 0$ y entonces

$$\tau = \frac{t}{t_0} \quad (2.29)$$

$$Q = \sqrt{P_0} \psi \quad (2.30)$$

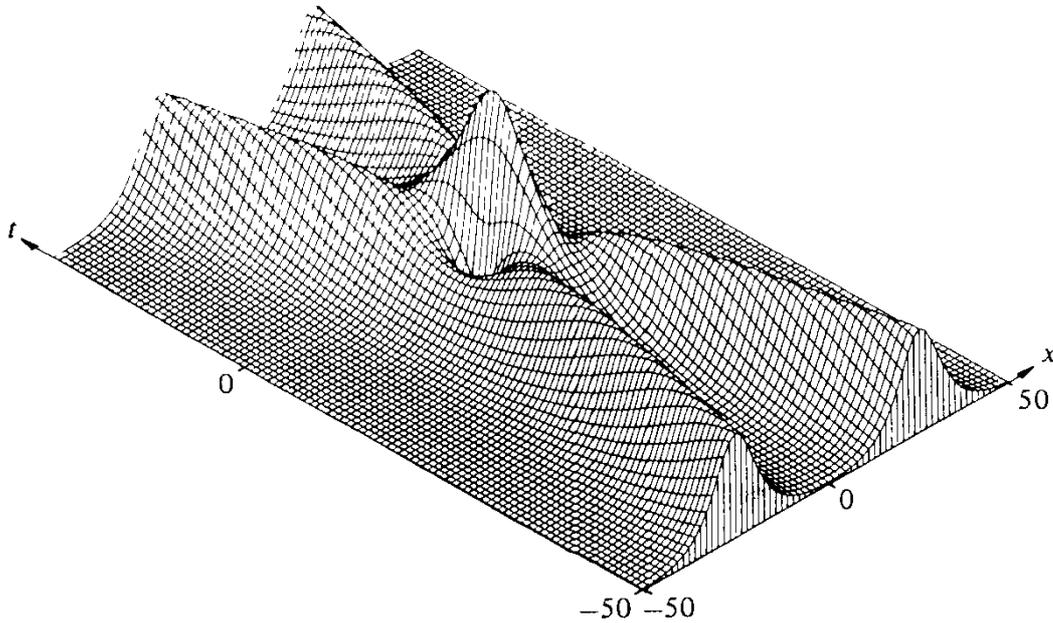


Figura 2.1: Solución de la Ecuación No-Lineal de Schrödinger, vista de la interacción de dos solitones, y satisface la ecuación 2.34

$$L_d = \frac{t_0^2}{|k_0''|} \quad (2.31)$$

y

$$P_0 = \frac{|k_0''|c}{\omega_0 n_2 \alpha t_0^2} \quad (2.32)$$

transformando a (2.27) como

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + |\psi|^2 \psi = 0 \quad (2.33)$$

Esta ecuación es conocida como la Ecuación NLS y ha sido usada extesamente para la propagación de solitones a través de una fibra óptica con la ley de No-Linealidad de Kerr. Para mantener la uniformidad de la notación, cambiamos a $z \rightarrow t$ y $\tau \rightarrow x$ la cual es la notación estandar [26] quedando de la forma

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0 \quad (2.34)$$

2.2. Ondas Viajeras

Una onda viajera es una solución de la Ecuación NLS [1,13,14] que representa una onda de forma permanente, que no cambia su forma durante la propagación y se mueve con una velocidad constante. Donde la onda puede ser localizada o periódica. Con el fin de buscar una solución de onda viajera para la ecuación NLS (2.34), se introduce un Anzats de la forma

$$\psi(x, t) = Ag[B(x - \bar{x})]e^{i(-kx + \omega t + \sigma_0)} \quad (2.35)$$

donde la función g representa la forma solitónica descrita para (2.34) y depende del tipo de no linealidad en el mismo. También, A y B , representan la amplitud y el ancho de la solitones respectivamente, ω es la frecuencia solitónica, k es el número de onda, σ_0 es el centro de fase de los solitones, y \bar{x} en la posición media de modo que la velocidad de los solitones esta dada por

$$v = \frac{d\bar{x}}{dt} \quad (2.36)$$

La anchura y la amplitud del soliton esta relacionada de la forma $B = \Lambda(A)$ donde la forma funcional λ depende de la no linealidad de (2.34). Entonces tenemos que

$$\psi_t = -ABvg'(\tau)e^{i\phi} - i\omega Ag(\tau)e^{i\phi} \quad (2.37)$$

donde la fase es

$$\phi = -kx + \omega t + \sigma_0 \quad (2.38)$$

y

$$\tau = B(x - \bar{x}) \quad (2.39)$$

donde para (2.35) podemos escribir

$$\psi_{xx} = AB^2g''(\tau) - 2ikABg'(\tau) - k^2Ag(\tau) \quad (2.40)$$

ahora si sustituimos (2.37) y (2.40) en (2.34) tenemos

$$-iBvg' + wg + \frac{1}{2}B^2g'' - ikBg' - \frac{1}{2}k^2g + gF(A^2g^2) = 0 \quad (2.41)$$

de (2.40) dividimos la parte real y la parte imaginaria, entonces

$$ABg'(k + v) = 0 \quad (2.42)$$

y

$$B^2g'' - (k^2 - 2\omega)g + 2gF(A^2g^2) = 0 \quad (2.43)$$

entonces de (2.42), obtenemos

$$k = -v \quad (2.44)$$

Ahora, multiplicamos la ec. (2.43) por g' en ambos lados, la integración y elección de la constante de integración es igual a cero ya que el perfil de la onda es tal que ψ , ψ_x , y ψ_{xx} se aproximan a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$ teniendo

$$B^2(g')^2 - (k^2 - 2\omega)g^2 + 2 \int (g^2)' F(A^2 g^2) dg = 0 \quad (2.45)$$

Con separación de variables e integrando una vez más, la ecuación (2.45) conduce a

$$x - vt = \int \frac{dg}{[(k^2 - 2\omega)g^2 - 2 \int (g^2)' F(A^2 g^2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.46)$$

La ecuación (2.46) puede ser integrado sólo si la ley de no linealidad se conoce.

Capítulo 3

Ecuación No-lineal de Schrödinger

La ecuación No-lineal de Schrödinger (NLS) proporciona una descripción canónica sobre la dinámica de una onda plana cuasi-monocromática propagándose en un proceso de dispersión débilmente no lineal. El tiempo y las distancias de propagación son cortos, la dinámica es lineal, pero las interacciones no lineales acumuladas son un importante resultado en la modulación de la amplitud de onda a grandes escalas espaciales y temporales. La ecuación NLS expresa la relación de dispersión lineal que es afectada por el engrosamiento de las líneas espectrales asociados a la modulación y a las interacciones resonantes no lineales. En óptica, esto también puede ser visto como una extensión a los medios no lineales en aproximaciones paraxiales, ampliamente utilizados para la propagación de ondas lineales en medios aleatorios.

Escribimos la ecuación No lineal de Schrödinger de la siguiente forma[1-13]

$$i\psi_t + \psi_{xx} + F(|\psi|^2)\psi = 0 \tag{3.1}$$

donde $F(|\psi|^2)\psi$ es un valor y una función algebraica que debe tener la suavidad de una función compleja $F(|\psi|^2)\psi : C \rightarrow C$. Considerando un plano complejo C como un espacio lineal de dos dimensiones R^2 , entonces se puede decir que la función $F(|\psi|^2)\psi$ es k veces continuamente diferenciable de modo que

$$F(|\psi|^2)\psi \in U_{m,n=1}^\infty C^k((-n, n) \times (-m, m); R^2)$$

Matemáticamente esta es la forma estandar de escribir esta ecuación [7,13]. Donde las variables x y t son diferentes para los distintos problemas [13]. Por ejemplo para el problema de una onda dispersada en una fibra óptica, t está relacionada con la distancia a lo largo de la fibra, y x está relacionada con el tiempo (por convención para Ecuación NLS), es decir una cordenada moviendose con la velocidad de grupo del pulso. Así, las ecuaciones de este tipo son algunas veces conocidas como ecuaciones no lineales de evolución. Esta es una ecuación diferencial parcial no lineal que no es integrable, en general. La no integrabilidad no está necesariamente relacionada con el término no lineal de (3.1). Los altos ordenes de dispersión, por ejemplo, pueden también hacer un sistema no integrable mientras estos siguen siendo hamiltoniano.

De tal forma que la solución solitónica simple tiene la forma:

$$\psi = \psi_0 \operatorname{sech}[(F/2)^{\frac{1}{2}}\psi_0(x - at)\exp[i(a/2)(x - bt)]] \quad (3.2)$$

donde a y b son las velocidades de la dotación y transporte, respectivamente; y $\psi(x, t)$ es compleja.

La Ecuación (3.1) rige la evolución de un paquete de ondas en un medio débilmente no lineal y dispersivo. Una de las aplicaciones de esta ecuación está en la formación de un patrón, usado para modelar la formación de patrones de algunos sistemas fuera de equilibrio. En particular, esta ecuación es ampliamente utilizada como se ha mencionado en la óptica como un buen modelo para la propagación de pulsos ópticos no lineales en fibras [1-14].

3.1. Clasificación de la No linealidad

Existen diversos tipos de no-linearidades de la función F en (3.1) caracterizándose de la siguiente manera [13]:

1. Ley de Kerr: $F(s) = s$. También se conoce como No-linealidad cúbica es la forma más sencilla de conocer la ley de No-linealidad. En este caso, la ecuación NLS es integrable por un método llamado la Dispersión de transformación inversa. La mayoría de las fibras ópticas que están disponibles comercialmente obedecen la ley de no linealidad de Kerr .
2. Ley de Potencias: $F(s) = s^p$. En este caso, es necesario tener a $0 < p < 2$ para evitar el colapso de ondas. De hecho, es obligatorio que $p \neq 2$ para evitar la singularidad auto-enfocada. Esta ley surge de la no linealidad en plasmas no lineales y resuelve el problema de los pequeños K -condensados en la teoría débil de turbulencias. También surge en el contexto de la óptica no lineal. Físicamente, los diversos materiales, incluyendo los semiconductores, exhiben no-linearidades de la ley de potencias. Este es un caso de no linealidad, donde se incluyen terminos de perturbación por análisis de múltiple-escala. El caso en que $p = \frac{1}{2}$ se estudia en turbulencias de solitones.
3. Ley Parabólica: $F(s) = s + \nu s^2$. Esta ley se conoce comúnmente como la No-linealidad cúbica-quinta. El segundo termino es grande para el caso de p -cristales de sulfonato de tolueno. Esta ley surge de la interacción no lineal entre las ondas de Langmuir y electrones. En él cual se describe la interacción no lineal entre las ondas de Langmuir de alta frecuencia y las ondas de iones-acústicos por fuerzas de movimientos de reflexión.
4. Ley de doble potencia: $F(s) = s^p + \xi s^{2p}$. Este modelo se utiliza para describir la saturación del índice de refracción no lineal, y tiene soluciones solitónicas exactas. La ecuación efectiva GNLS con la No-linealidad de la ley de doble potencia sirve como un modelo básico para describir solitones espaciales fotorrefractivos-fotovoltaicos en materiales tales como el niobate de litio.

Las No-linealidades ópticas en muchos materiales orgánicos y polímeros pueden ser modeladas usando esta forma de No- linealidad. El soliton de este modelo se vuelve inestable y en la región inestable $1 \leq p < 2$ existe decadencia, mientras que para $p \geq 2$, los solitones colapsan en un tiempo finito.

5. Ley de saturación: $F(s) = \frac{\lambda s}{1+\lambda s}$. Esta ley con $\lambda > 0$ describe con precisión la variación de la constante dieléctrica de los vapores de gas a través de los cuales se propaga un haz láser [30]. La cual establece No-linealidad óptica saturada en un valor finito de intensidad óptica en la mayoría de los materiales. $F(s)$ en estos materiales puede ser modelada utilizando el formulario, que se conoce como la forma No-lineal saturanda. En fibras de semiconductores dopados, la propagación de solitones se basa en el uso de No-linealidad saturada en lugar de la habitual No-linealidad de Kerr. En donde, en la observación de la No-linealidad de este tipo, no es demasiada alta en intensidad, en algunos semiconductores dopados de vidrio y otros materiales compuestos. Este caso es estudiado numéricamente en la literatura.
6. Ley Exponencial: $F(s) = \frac{1}{2\lambda} * (1 - e^{-2\lambda s})$. En este caso la No-linealidad exponencial sirve como un modelo útil homogéneo, de plasmas no magnetizados y plasmas producidos por láser. Cuando la velocidad de fase de oscilación lenta de plasma es mucho menor que la velocidad térmica de iones, se puede obtener la densidad electrónica adiabática o cuasi-estática en virtud de la aproximación cuasi-neutral. Ahora, la combinación de la ecuación de acoplamiento que presenta una amplitud compleja que varía lentamente con el movimiento del plasma de baja frecuencia, se obtiene la ley de No-linealidad saturable.
7. Ley logarítmica: $F(s) = a \ln(b^2 s)$. Esta ley surge en diversos campos de la física contemporánea. Permitiendo encerrar de forma exacta las expresiones de haces Gaussianos estacionarios, así como periódicos y cuasi-periódicos en regímenes de haces de evolución. La ventaja de este modelo es que la radiación de los solitones periódicos está ausente debido a que el problema de linealización tiene un espectro solamente discreto.
8. Ley polinomial de Alto orden: $F(s) = s + \nu s^2 + \gamma s^3$. Esta ley es una extensión de la ley parabólica [35]. Esta ley también se observó en varios sistemas físicos [31, 35]
9. Ley de Triple potencia: $F(s) = s^p + \nu s^{2p} + \gamma s^{3p}$. Esta ley es una ampliación del producto de la ley de doble potencia y es una generalización de la ley polinomial de Alto ordeno.
10. Ley de Umbral:

$$F(s) = \begin{cases} n_1 : s < I_0 \\ n_2 : s \geq I_0 \end{cases}$$

Una transición sin problemas de este tipo pueden ser modeladas como:

$$F(s) = As(1 + \alpha \tanh[\gamma(s^2 - I_0)^2])$$

donde para $s \ll I_0$, $F(s) \approx n_1 s$, donde $n_1 = A(1 + \alpha \tanh^2[\gamma(I_0^2)])$, y para que $s \gg I_0$, $F(s) \approx n_2 s$, donde $n_2 = 1 + \alpha$. Aunque los ejemplos y los materiales ópticos no lineales, que obedecen esta

ley todavía no se conocen muy bien, los solitones biestable tienen propiedades interesantes que pueden ser útiles para futuras aplicaciones en toda la óptica-lógica y los dispositivos de conmutación.

De estas diez formas de la función F , las primeras cuatro leyes de no linealidad permiten soluciones solitónicas exactas, sin embargo, para la ley saturable, la solución solitónica exacta no se conoce y esta forma de no linealidad se puede resolver por medio del principio variacional.

Hasta la fecha se conoce, una forma no cerrada de soluciones solitónicas sobre todo, para las primeras cuatro formas de no linealidad. Sin embargo, una considerable cantidad de investigaciones está en marcha para la ley polinomial de alto orden y la ley triple de no- linealidad para poder obtener la forma cerrada de soluciones solitónicas ópticas.

Con lo que se puede decir que la ecuación NLS describe los fenómenos con una débil no linealidad y una fuerte dispersión, como las olas en aguas profundas, los láseres auto-enfocados en dieléctricos, la propagación de señales en fibras ópticas.

3.2. Solución de la Onda Solitónica

Como se vio en la sección anterior se trata de encontrar una solución a la ecuación (3.1) NLS; entonces se busca una solución localizada de $|\psi|$ que es estacionaria en x , es decir, una forma estacionaria del paquete [5]. Dado que estamos interesados en una solución local, nos aseguramos de que la solución sea únicamente una campana (para describir el solitón) mediante la imposición de las siguientes condiciones:

1. $|\psi|$ esta limitada por dos límites ρ_s y ρ_D ;
2. para $|\psi|^2 = \rho_s$, $|\psi|^2$ es un extremo, es decir, para $|\psi|^2 = \rho_s$, $\partial|\psi|^2/\partial t = 0$, pero la $\partial^2|\psi|^2/\partial t^2 \neq 0$; y
3. ρ_D es un valor asintótico para $|\psi|^2$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$, es decir, para $|\psi|^2 = \rho_D$, $\partial^n|\psi|^2/\partial t^n = 0$, con $n = 1, 2, \dots$

De forma que la solución que satisface estas condiciones para (3.1), donde se introducen dos variables una real y una compleja, las cuales son ρ y σ respectivamente, es

$$\psi(t, x) = \sqrt{\rho(t, x)}e^{i\sigma(t, z)} \quad (3.3)$$

entonces si sustituimos esta expresión dentro de (3.1), se tiene

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial\sigma}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.4)$$

y

$$\frac{1}{8} \frac{d}{d\rho} \left[4\rho^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 \right] = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 \quad (3.5)$$

Entonces la condición estacionaria para $|\psi|^2 = \rho$ resulta cuando $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$. entonces de (3.4), tenemos que

$$\rho \frac{\partial \sigma}{\partial t} = c(x) \quad (3.6)$$

Mostrando que existe solo una única opción posible para que la constante de integración $c(x)$ sea una constante independiente de x . Para esto, se toma que del lado izquierdo de (3.5) sea una función de t , y, por tanto,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 = f(t) \quad (3.7)$$

donde para las derivadas con respecto de x y t , tenemos

$$\frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^2 \partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \frac{dc^2}{dx} = 0$$

mientras que para (3.7)

$$\frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^2 \partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{d^2 c}{dx^2}$$

de manera que,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2 c}{dx^2} - \frac{1}{\rho^3} \frac{d\rho}{dt} \frac{dc^2}{dx}$$

o

$$\frac{d^2 c}{dx^2} / \frac{dc^2}{dx} = \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \text{constante}$$

de tal forma esta solución no es aceptada, siendo la única opción alternativa $c(z) = \text{constante}$. Consecuentemente, (3.6) se hace

$$\rho \frac{\partial \sigma}{\partial t} = c_1(\text{constante}) \quad (3.8)$$

o

$$\sigma = \int \frac{c_1}{\rho} + A(x) \quad (3.9)$$

Porque $\partial \sigma / \partial t$ puede ser una función solo de t , para (3.7), la $\partial \sigma / \partial x$ también debería ser una función de t . De ahí, tomamos la dA/dx sea una constantes ($= \Omega$)

$$\sigma = \int \frac{c_1}{\rho} + \Omega x \quad (3.10)$$

Usando esta ecuación en (3.7) se obtiene la ecuación diferencial parcial ordinaria para $\rho(t)$:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = -4\rho^3 + 8\Omega\rho^2 + c_2\rho - 4c_1^2 \quad (3.11)$$

Ahora se busca una solución de esta ecuación, sujeta a las condiciones de 1 a 3. Para satisfacer la condición 1, $d\rho/dt$ debe desaparecer sólo para dos valores de ρ , ρ_D y ρ_s . Además, la raíz para ρ_D representa un valor asintótico de ρ , esto debe ser una doble raíz. Estas condiciones son encontradas sólo para $-4c_1^2 \geq 0$, o $c_1 = 0$, y de ahí, también $c_2 = 0$. La ecuación (3.11) se reducen a

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = -4\rho^3 + 8\Omega\rho^2 = 4\rho^2(\rho - \rho_s) \quad (3.12)$$

donde

$$\rho_0 = 2\Omega \quad (3.13)$$

La ecuación (3.12) se puede escribir en la forma Hamiltoniana, como

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + V = E_0 \quad (3.14)$$

siendo $V = 2\rho^2(\rho - \rho_s)$, $E_0 = 0$. Este potencial efectivo hace notar que existe un partícula atrapada en un potencial que tiene un período de oscilación infinito, que es, una aproximación a $\rho = 0$ después de un tiempo infinito, si esto comienza en $\rho = \rho_0$ con velocidad inicial cero. Esto corresponde a una solución solitónica. Integrando la ecuación (3.12) tenemos que

$$\rho = \rho_0 \sec h^2(\sqrt{\rho_0}t), \quad (3.15)$$

donde $\rho = \rho_0 = 2\Omega$, $\Omega > 0$ y

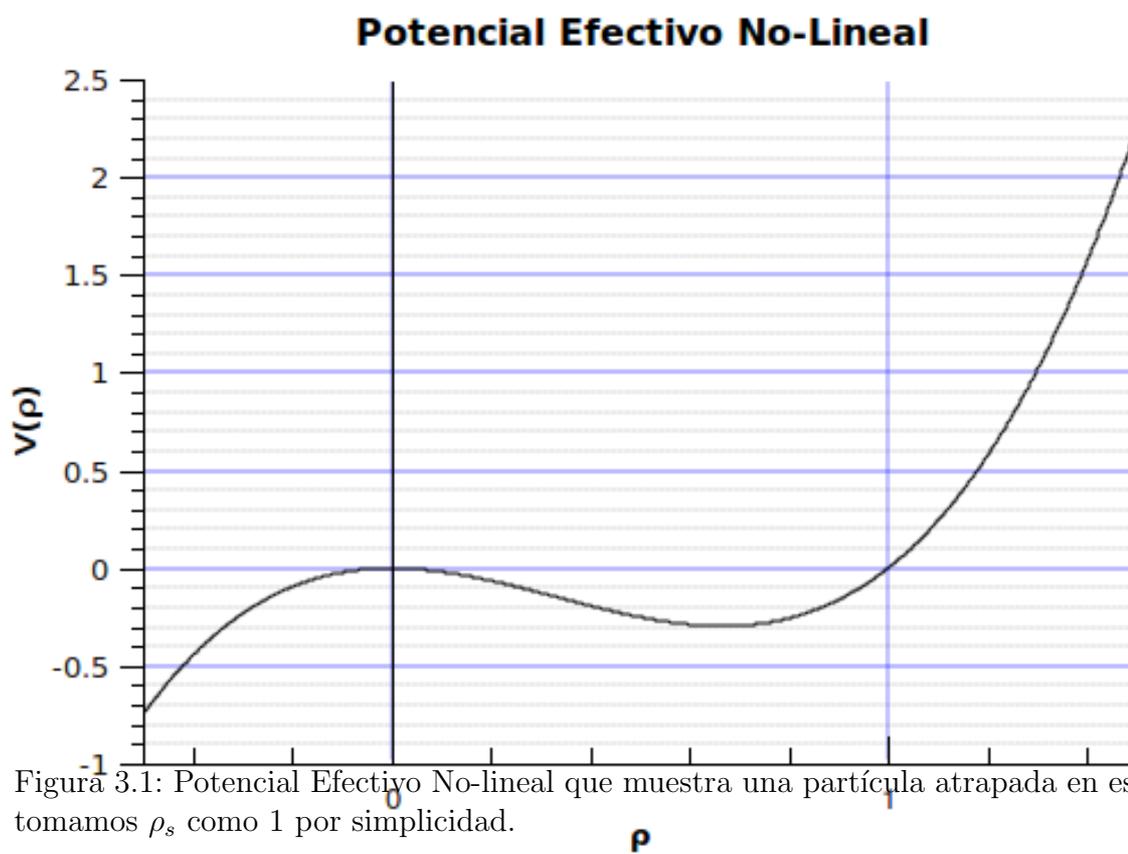
$$\sigma = \Omega x = \rho/2 \quad (3.16)$$

La ecuación No-lineal de Schrödinger (3.12) puede mostrar que es invariante con respecto a la transformación de Galileo, que esta, satisface una función $\psi'(x, t)$, que esta dada por:

$$\psi'(x, t) = \exp[-i(kx + (1/2)k^2x)]\psi(x + kx, x)$$

con una variable independiente k , una constante de fase σ y una posición de tiempo t_0 , sobre la solución solitónica se convierte en

$$\psi(x, t) = \eta \sec h\eta(t + kx - t_0) \exp \left[-ikt + \frac{i}{2}(\eta^2 - k^2)x - i\sigma \right] \quad (3.17)$$



donde $\eta = \sqrt{\rho_0}$

Esta ultima solución de onda solitónica consta de cuatro parámetros de los cuales η representa la amplitud y ancho del pulso de la onda solitónica, k representa la velocidad del mismo (la cual es una desviación para la velocidad de grupo); la posición de tiempo t_0 y la fase σ . Notando que la altura η es inversamente proporcional al ancho del pulso, y la constante k que representa la velocidad del pulso de transmisión, es independiente de la altura del mismo. Respecto a esto, los ultimos hechos difieren para un soliton KdV donde la velocidad del soliton es proporcional a la amplitud del pulso. La solución solitónica de la ecuación NLS expresada en (3.17) es llamada solitón envuelto. Teniendo que la forma de la onda de luz es un solitón óptico.

3.3. Solución de una Onda Viajera en un medio Kerr

Para el caso de la no-linealidad de Kerr la ecuación (3.1) es

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0 \quad (3.18)$$

entonces la ecuación del (2.42) se simplifica como

$$B^2 g'' - (k^2 - 2\omega)g + 2A^2 g^3 = 0 \quad (3.19)$$

De tal forma si multiplicamos la ecuación (3.19) por g' y las interacciones producidas tenemos

$$(g')^2 = \frac{g^2(k^2 - 2\omega - A^2 g^2)}{B^2} \quad (3.20)$$

Haciendo una separación de variables y tomando la integración, escojemos una constante de integración igual a cero, con lo que

$$x - vt = \int \frac{dg}{g\sqrt{k^2 - 2\omega - A^2 g^2}} \quad (3.21)$$

y en la sustitución de

$$g^2 = \frac{k^2 - 2\omega}{A^2 \cosh^2 \theta} \quad (3.22)$$

conduce a la solución solitónica

$$\psi(x, t) = \frac{A}{\cosh[B(x - \bar{x}(t))]} e^{i(-kx + \omega t + \sigma_0)} \quad (3.23)$$

donde

$$k = -v \quad (3.24)$$

y

$$\omega = \frac{B^2 - k^2}{2} \quad (3.25)$$

mientras que $A = B$ nos da la solución 1-solitónica de la ecuación NLS con no-linealidad de Kerr que puede ser obtenida a través de una onda con un ansatz, como se mostro, anteriormente.

Capítulo 4

Ecuación Cúbica-Quinta de Schrödinger

Ahora consideramos la propagación de un pulso óptico en el medio, que es caracterizado por la no-linealidad de alto orden de tipo Kerr. El modelo cúbico-quinto es muy conveniente para estudiar ondas solitónicas en dos y tres dimensiones, de forma que cuando la no-linealidad cúbica esta auto-enfocada, la no-linealidad quinta esta auto-desenfocada, excluyendo el colapso de las ondas [26]. En esta sección se va a llevar a cabo el tratamiento para una dimensión; tomando en cuenta la ley de no-linealidad parabólica, que est también llamada Ecuación No-Lineal Cúbica-Quinta de Schrödiger (ENCQS) [27].

4.1. Ley de No-Linealidad Parabólica

Esta ecuación se ha conocido desde hace mucho tiempo para haces ópticos auto-enfocados en el espacio y el tiempo, propagandose en un medio no-lineal. El colapso de haces ópticos en dos y tres dimensiones en un medio Kerr se considerada como un medio de producción de altos campos eléctricos fuertes. Aquí se observá que la inclusión de una no-linealidad saturable singular podría detener el colapso, por lo que la formación de un haz óptico que se propaga sin cambiar su forma temporal o espacial, se resuelve conjuntamente por los efectos no lineales. Para obtener un poco de conocimiento del diámetro del haz de auto-captura, es necesario considerar no-linealidades superiores al tercer orden. Como se reconoció en 1960 y 1970 donde la saturación del índice de refracción no-lineal tiene un papel fundamental en el fenómeno de auto-captura, la no-linealidad de orden superior surgen para mantener el orden superior de los términos no-lineales en el tensor de polarización [27]. La no-linealidad de quinto orden, y el índice de refracción vienen dados por

$$n = n_0 + n_2|E|^2 + n_4|E|^4 \quad (4.1)$$

donde n_0 es el índice de refracción lineal del medio y $|E|^2$ es la intensidad del campo eléctrico de la onda de luz, mientras que $n_2 = 3\chi^{(3)}/8n_0$ y $n_4 = 5\chi^{(5)}/16n_0$ con $n_0 > n_2|E|^2 > n_4|E|^4$. Aquí, n_2 y n_4 representan respectivamente los coeficientes de tercer y quinto orden no-lienal. En general, los coeficientes n_2 y n_4 pueden ser positivos o negativos, dependiendo del medio y la frecuencia

seleccionada [26,27].

De manera general, anteriormente se presta poca atención a la propagación de haces ópticos en la no-linealidad de quinto orden para los medios, porque no se conocían las soluciones de analíticas y parecía que las posibilidades de encontrar cualquier material con un termino significativo de quinto orden fueron escasas. Sin embargo, los acontecimientos recientes han reavivado el interés en este ámbito [7]. La susceptibilidad óptica de lentes dopados de CdS_xS_{1-x} fue experimentalmente demostrada teniendo una considerable $\chi^{(5)}$, o susceptibilidad de quinto orden. También se demostró que existe una parte importante de no-linealidad $\chi^{(5)}$ en el efecto transmitir en un cristal transparente un pulsos de femtosegundos intensos en 620 nm [5,7,26].

Además de estos efectos de saturación, también se propuso que el dopaje del cristal de silicio con dos semiconductores apropiados conduce partículas (en una región lejos de la saturación) exactamente a la forma parabólica del índice de refracción con un incremento efectivo del valor de n_4 y un valor reducido de n_2 . En otros materiales, los valores de n_2 y n_4 también puede depender del dopaje [27].

Un material orgánico no lineal como es el polydiacetyleno de sulfato de para-tolueno (SPT) es otro material que puede ser descrito con exactitud por la ley parabólica. Las mediciones de SPT indican que $n_2 > 0$ y $n_4 > 0$ a 1600nm, con baja pérdida y absorción multisolitónica insignificante. El espectro de SPT revela dos de tres fotones excitandos que pueden representar el valor observado de n_2 . La ausencia de estados cercanos que pueden saturar, se puede interpretar como las derivadas de Stark para n_4 del cambio de los dos estados de fotones. Esto lleva a la conclusión de que el modelo de la ley parabólica puede considerarse como un modelo exacto para el SPT y materiales similares, ya que este material produce solitones de menor potencia. La confirmación experimental da lugar a que el SPT sea la única clase de material de estado sólido con no-linealidad de tercer orden positivo y quinto orden negativo.

Un reciente estudio de la no lineal de modulación de auto-fase de un haz fundamental en un proceso de generación del tercer-armónico mostró que el haz experimenta un cambio de fase de orden superior como consecuencia de que el coeficiente n_4 es una suma de dos términos. La primera se debe a la susceptibilidad inherente de $\chi^{(5)}$ del medio y el segundo es debido a una cascada de no-linealidad de tercer orden, es decir,

$$n_4 = n_4^{dir} + n_4^{casc}$$

con el término n_4^{casc} en cascada, lo cual es proporcional a $(\chi^{(3)})^2$. Los términos en cascada n_4^{casc} siempre pueden ser superiores a n_4^{dir} mediante la manipulación de la muestra de longitud, del vector de onda, y la intensidad del haz.

Observando el desarrollo teórico y prestando interés en la óptica de la propagación del haz. La forma de la ley de no-linealidad parabólica con NLSE [27] esta dada por

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + (|\psi|^2 + \nu|\psi|^4)\psi = 0 \quad (4.2)$$

4.1.1. Aplicación de la Ley Parabólica

Para esta parte, teniendo la ecuación NLS (3.1); podemos decir que f es dependiente solo en un instante de la intensidad de luz [7]. De manera que si tenemos la función f de la forma

$$f(s) = s + \nu s^2 \quad (4.3)$$

haciendo ν negativo, el potencial tiene un máximo, y si esto ocurre $s = s_1$, donde

$$s_1(\nu) = -\frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 + 4\nu q}] \quad (4.4)$$

La condición $\nu(s_1) \geq 0$ demanda que $q\nu \geq -\frac{3}{16}$ para que exista un solitón. Si ν es positivo, no obtenemos un máximo, entonces un solitón puede existir para toda $\nu > 0$. En otro caso, podemos escribir bajo la intensidad máxima para un pulso centrado teniendo la forma

$$s_m(\nu) = \frac{3}{4\nu} \left[\sqrt{1 + \frac{16}{3}\nu q} - 1 \right] \quad (4.5)$$

4.2. Onda viajera en la ECQNLS

Tenemos que la ECQNLS descrita por (4.2), de la forma

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + (|\psi|^2 + \nu|\psi|^4)\psi = 0$$

y escribiendo la ecuación (2.43) como

$$B^2 g'' - (k^2 - 2\omega)g + 2A^2 g^3 + 2\nu A^4 g^5 = 0 \quad (4.6)$$

multiplicando (4.6) por g' e integrando, nos queda

$$(g')^2 = \frac{g^2}{3B^2} [3(k^2 - 2\omega) - 3A^3 g^2 - 2\nu A^4 g^4] \quad (4.7)$$

Utilizando separación de variables e integranos nuevamente, entonces queda

$$x - vt = \sqrt{3} \int \frac{dg}{g[3(k^2 - 2\omega) - 3A^3 g^2 - 2\nu A^4 g^4]^{1/2}} \quad (4.8)$$

al entonces resolver esta integral tenemos la solución 1-solitónica es de la forma

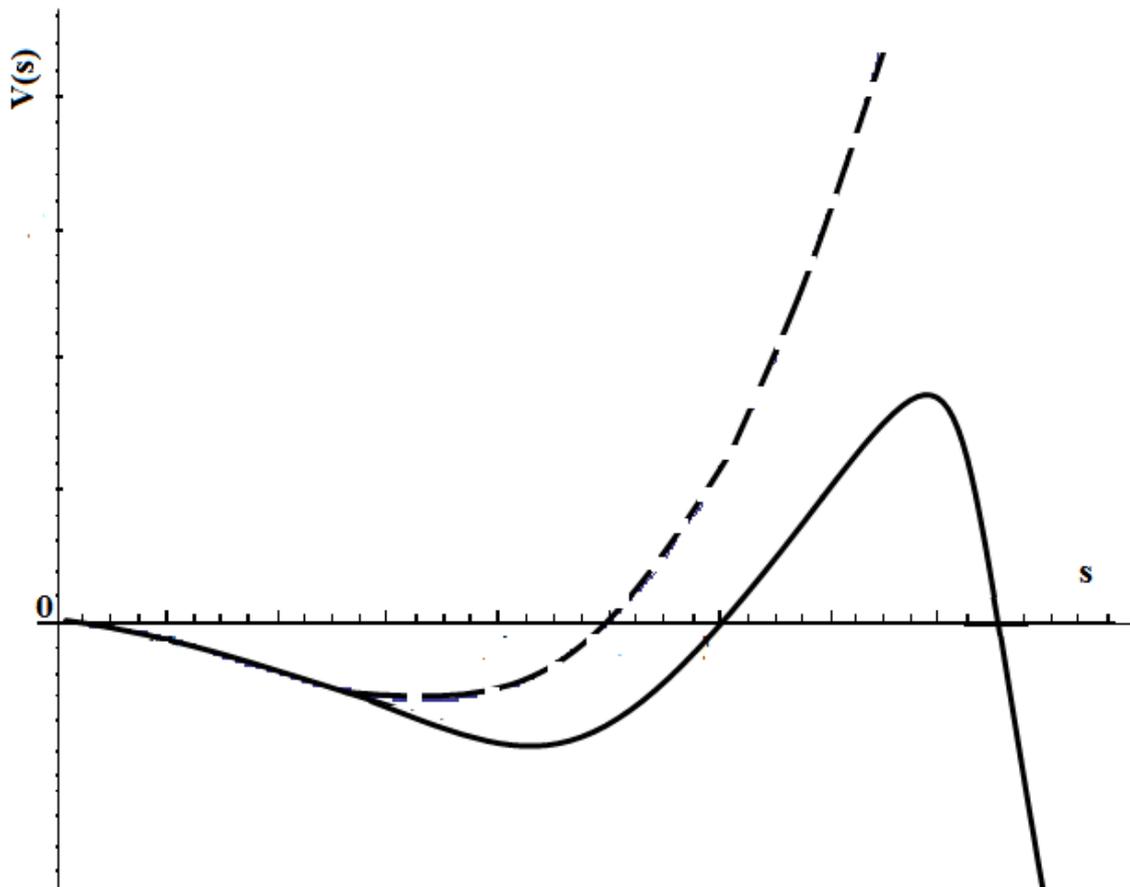


Figura 4.1: Potencial Efectivo para la No-linealidad parabólica, $v > 0$ (línea punteada)(caso kerr), $v < 0$ línea sólida (ECQNLS)

$$\psi(x, t) = \frac{A}{[1 + a \cosh(B(x - \bar{x}(t)))]^{1/2}} e^{i(-kx + \omega t + \sigma_0)} \quad (4.9)$$

donde

$$B(t) = \sqrt{2}A(t) \quad (4.10)$$

$$k = -v \quad (4.11)$$

$$\omega = \frac{A^2}{4} - \frac{k^2}{2} \quad (4.12)$$

y

$$a = \sqrt{1 + \frac{4}{3}\nu A^2} \quad (4.13)$$

Donde A es la amplitud y parametro principal del solitón, B es el ancho del solitón, v es la velocidad, ω es la frecuencia, k es el número de onda, \bar{x} y σ_0 es el centro del solitón y el centro de la fase del solitón, respectivamente. La ecuación (4.10) da la relación entre la amplitud y el ancho del soliton para el caso de la ley no-lineal de potencias. Entonces, los parametros dinámicos del solitón son:

$$\frac{dA}{dt} = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{dB}{dt} = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{dk}{dt} = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -k \quad (4.17)$$

Estos parámetros nos dan la dinámica de los pulsos ópticos solitónicos.

4.3. Generalización de la ECQNLS

Sabemos que la ecuación NLS en terminos quintos es (4.2), cuando ν sea la susceptibilidad no-lineal de quinto orden. La cual describe la propagación de un pulso en la ecuación de la ley parabólica no-lineal. Siendo que cuando $\nu = 0$ se aplica la ley de Kerr. Entonces la solución solitónica de (4.2) queda:

$$\psi(z, \tau) = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + B\nu A} \cosh(2\sqrt{A}\tau)}} e^{iAz} \quad (4.18)$$

sabiendo que $B = 16/3$ como se observo en la subsección 4.1.1. La solución solo es validad para $-3/16 < \nu A < \infty$. En lo cual para límites pequeños, la energía del solitón tiende a infinito. En donde existe un pico de intensidad del pulso cuando

$$|\psi(z, t)|^2 \quad (4.19)$$

que esta dado por la ecuación (4.5), en el cual en el límite cuando $\nu = 0$ la solución de (4.18) se reduce a la ecuación estandar NLS.

Siendo esto la energía transportada por el solitón para (4.18) teniendo la forma

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\tau \quad (4.20)$$

la cual al integrar nos queda

$$Q = \sqrt{\frac{3}{2\nu}} \tan^{-1} \left(4\sqrt{\frac{\nu A}{3}} \right) \quad (4.21)$$

De otro manera cuando $\nu > 0$

$$Q = \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{2\nu}} \tan^{-1} \left(4\sqrt{\frac{-\nu A}{3}} \right) \quad (4.22)$$

Y finalmente para el caso de que $3/16 < \nu A < 0$, si $|\nu|$ es muy pequeño, entonces

$$Q \approx 2\sqrt{2}A \left(1 - \frac{16}{9}\nu A + \dots \right) \quad (4.23)$$

De modo que se considera la propagación de un pulso óptico en un medio, el cual es caracterizado por tener una linealidad de alto orden. siendo un modelo muy conveniente, para el estudio de ondas solitónicas en dos y tres dimensiones, cuando la no-linealidad cúbica esta auto-enfocada y la no-linealidad de quinto orden esta auto-desenfocada, la onda colapsa, por lo cual para evitar este efecto se toma de forma unidimensional de la ecuación generalizada de schrödinger

Capítulo 5

Solitones grises en una Fibra Óptica en la ECQNLS

La no-linealidad de alto orden en fibras ópticas se relacionan con campos ópticos más fuertes y de gran poder de correspondencia dentro de las fibras o en los casos en que la frecuencia del campo se acerca a una frecuencia de resonancia de algún material. En ambas situaciones, existe un interesante efecto físico, en el cual hay una saturación de no-linealidad con el aumento de la intensidad del campo óptico, simplemente, es una influencia importante de orden superior, donde los términos no-lineales en el índice de refracción dan el comportamiento de los fenómenos de ondas no lineales. En donde se podría preguntar la forma en la que influyen los términos no-lineales de alto-orden en la propagación de solitones ópticos. Para lo cual se propone un modelo concreto para la ley no-lineal del índice de refracción; donde se modela la no-linealidad del índice de refracción en una expansión de serie de potencias Ec. (4.1). Si la expansión se reduce a términos de segundo orden con respecto a $|E|^2$, entonces la ecuación diferencial correspondiente que rigen la evolución no-lineal del campo eléctrico sobre el pulso en el medio, esto es la Ecuación Cúbica Quinta No-Lineal de Schrödinger (ECQNLS),[41]. Con esto, se establece, que la no-linealidad puede ser utilizada para la propagación de una onda solitaria en una guía de ondas ópticas altamente no-lineales [42-44]. De modo que, se considera un medio con el índice de refracción no lineal dado, en el que se permite hacer una evaluación analítica relativamente sencilla, para ofrecer al mismo tiempo, nuevas características físicas de la propagación de una onda solitaria en una fibra óptica.

Formalmente la ecuación cúbica-quinta no-lineal puede ser obtenida por una expansión en la saturación no-lineal de (4.1) de la forma $n(\omega, E) = n_0(\omega) + n_2 E^2 / [1 + (n_4/n_2) E^2]$. Aquí la no-linealidad cúbica-quinta es obtenida por el dopaje de la fibra con dos materiales semiconductores apropiados. Donde se debe tener un dopante Kerr positivo constante $n_2^{(1)} > 0$ y gran saturación de intensidad del campo $E_{SAT}^{(1)}$ y el otro deben tener un efecto negativo Kerr constante $n_2^{(2)} < 0$ casi la misma magnitud, pero, la intensidad de saturación menor, $E_{SAT}^{(2)} \ll E_{SAT}^{(1)}$. Entonces se puede ampliar la expresión de

$n(\omega, E)$, truncando la serie, y se llega a la no-linealidad cúbica-quinta [40-41].

En los últimos años, ha habido grandes avances sobre la medición de la no-linealidad cúbica-quinta en fibras ópticas [45-48]. Donde la propagación de pulsos a través de las fibras no-lineales ha recibido mucha atención ya que la competencia entre los diferentes órdenes de no-linealidad podrían resultar en la estabilización fuerte de la propagación de pulsos [49]. Analíticamente, la generación de solitones brillantes y oscuros se ha discutido en la no-linealidad cúbica-quinta en fibras ópticas con dispersión constante [50,51].

5.1. Solución de una Onda Solitónica en la ECQNLS

Para esta parte se hace un listado de como se lleva a cabo el método de solución, para el análisis de una onda solitónica en la ECQNLS, de donde tenemos:

1. La respuesta no-lineal del medio es aceptada por ser no resonante e instantánea.
2. El tercer y quinto armónico generan ondas que requieren una fase específica que coincida con las condiciones que no son consideradas.
3. El ancho de impulso en el tiempo es lo suficientemente grande ($\tau_{1/2} \succeq 0,1ps$) para descuidar los efectos de orden superior tales como la dispersión de tercer orden, el auto-encurvamiento, y el retraso de la respuesta no lineal, etc [13]. Los cuales llegan a ser apreciables para los pulsos de femtosegundos y no se toman en cuenta.
4. La distancia de propagación es tal que el efecto de perdida es despreciable. Donde la perdida puede ser tomada en cuenta de una manera sencilla, por un análisis numérico del comportamiento de la onda solitaria.

Si el coeficiente del índice refractivo no-lineal de la Ec. (4.1) $n_2 > 0$ y $n_4 < 0$, la ecuación CQNLS describe la variación lenta del pulso E en una fibra óptica que tiene la forma:

$$i\psi_t + \Omega\psi_{xx} - \chi_1\psi + \chi_2|\psi|^2\psi - \chi_3|\psi|^4\psi = 0 \quad (5.1)$$

como habíamos visto anteriormente t es la coordenada longitudinal, x es la coordenada temporal; y de acuerdo al orden de los terminos el tercer coeficiente χ_1 es el que tiene relación con la velocidad de grupo, con $\Omega > 0$ conteniendo la dispersión normal; y los coeficientes para el término Cúbico y Quinto son de la forma $\chi_2 = \kappa_0 n_2 \alpha_1$, $\chi_3 = \kappa_0 |n_4| \alpha_2$, $\kappa_0 = \omega_0/c$, con ω_0 es la frecuencia de onda; y α_1, α_2 son coeficientes de dispersión dimensionales, tomados en cuenta para la distribución de campo radial en el régimen no-lineal [14].

Asumiendo un perfil temporal adecuado del pulso, el equilibrio entre la dispersión y los términos no lineales en (5.1), exige que la parte cúbica y quinta no-lineal sean proporcionales. El tiempo inicial y la anchura de los pulsos puede calcularse sobre la base de estas igualdades al igual que los valores típicos para el índice de refracción no-lineal de los coeficientes para los diferentes materiales.

5.2. Solitones Grises en la ECQNLS

En esta sección, se mencionan las características físicas de la propagación de un solitón, en una fibra óptica, se propone una ecuación similar a (5.1), donde se van a encontrar la solución para uno, dos y tres solitones grises, en la ecuación Cúbica-Quinta No-Lineal de Schrödinger, usando la solución solitónica de la ecuación de Boussinesq para materiales estructurales [26,39].

Aquí se va representar a la ECQNLS, como una contribución, en la cual se contienen solitones grises y su interacción mutua en dimensiones de espacio-tiempo con coordenadas locales (x, t) , representada como

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - (3|\varphi|^2 - (2A + \rho_0))(|\varphi|^2 - \rho_0)\varphi = 0 \quad (5.2)$$

Siendo A el parametro principal del modelo. Donde las ondas no-lineales de tipo kink y de tipo burbuja aparecen en una importante variedad de sistemas físicos cuya dinámica es gobernada por la ec. (5.2); es decir que la no linealidad de tercer orden es saturada por terminos de quinto orden con signo opuesto, como se observo anteriormente. De manera que con esta consideración en mente, podemos hacer un importante mapa de la ec.(5.2) dentro de otra ecuación no lineal escogiendo los valores de los parámetros determinados y un vacío conveniente. La solución de la ultima ecuación (si se encuentra) podria servir como soporte elemental para la construcción de la ECQNLS, que admite soluciones de n-solitones. Mostrando que posteriormente esto se acerca a la posible solución.

La idea principal para la búsqueda de soluciones solitónicas en la Ec. (5.2), es elegir los valores de los parámetros determinados y un vacío adecuado, minimizando la pieza potencial del Hamiltoniano para la ecuación, la cual es:

$$\varphi_0 = \sqrt{a} \quad (5.3)$$

5.2.1. Parametrización de la ECQNLS

Para realizar la parametrización de la ECQNLS, se hace mención que, esta ecuación tiene tanto soluciones topológicas como no topológicas. (ver referencia 52).

Las soluciones no topológicas, son aquellas cuyas condiciones de frontera en el infinito, son las mismas que posee el estado de vacío. En cambio, los solitones topológicos poseen condiciones de frontera topológicamente distintas de las condiciones de frontera que tiene el vacío. Lo que quiere decir en particular, que deben existir estados de vacío degenerados [3]. Esto quiere decir, que el solitón estará “Amarrado” por sus condiciones de frontera.

En el caso de las soluciones regulares (que son denotadas como φ y a las cuales se les llama soluciones de campo) en la ECQNLS en dimensiones espacio-temporales. Nos permiten encontrar soluciones solitónicas en forma explícita.

De manera que teniendo la ecuación (5.2), obtenida mediante la ecuación (5.1) con simple cambio de escala de las variables y de la función de campo φ . Tenemos que los parámetros A y ρ_0 satisfacen la relación

$$\frac{A}{\rho_0} = -2 + \frac{3}{4} \frac{1}{\mu\nu} (1 + \sqrt{1 - 4\nu\mu}) \quad (5.4)$$

y las transformaciones de escala serán

$$\begin{aligned} \psi(\chi, \tau) &= \sqrt{\frac{3}{2\nu(A + 2\rho_0)}} \varphi(\chi, \tau) \\ \tau &= \left(\frac{9}{8}\right) \frac{1}{\nu} (A + 2\rho_0)^{-2} t \\ \chi &= \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{2\nu}} (A + 2\rho_0)^{-1} x \end{aligned}$$

Por lo que si perdida degenerabilidad es posible fijar el valor $\rho_0 = 1$, por que las propiedades de las soluciones dependen sólo de la relación paramétrica $\frac{A}{\rho_0}$. Donde A puede ser negativo o positivo en función del sistema físico de estudio.

Aquí como se ve en la sección 4.1 el signo de ν en (5.4) nos indica la existancia de un solitón debido a la intensidad del pulso que atravisa la fibra óptica.

Por lo que la estabilidad de la solución estacionaria va depender del signo de ν , de igual forma que el caso de la dispersión normal la cual como se observo anteriormente es con $\nu < 0$, por lo que tenemos un valor para A real para cualquier valor de μ y las soluciones obtenidas para las perturbaciones presentan una amplitud constante, por lo que en estas condiciones la solución estacionaria se

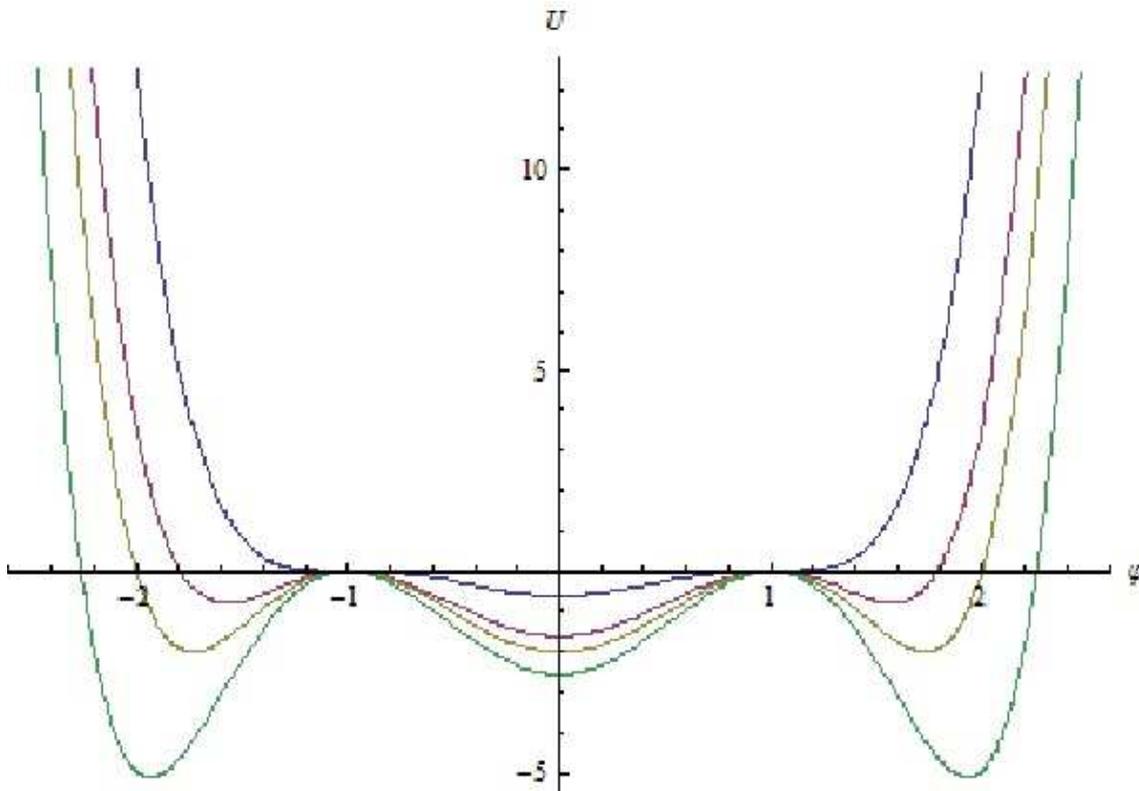


Figura 5.1: Potencial para varios valores del parámetro A de la ec. (5.2). Los mínimos de este potencial están ubicados en los puntos $\phi = 0$ y $\phi_0 = \pm\sqrt{a}$.

considera estable a pequeñas perturbaciones, como es el caso en la no linealidad de kerr. Por lo que se observa una buena trasferencia de información a través de la fibra óptica [53]; y de manera contraria para $\nu > 0$ la amplitud de perturbación crece exponencialmente.

Estas condiciones concuerdan con las aplicaciones expuestas en el capítulo 4.

Con estas condiciones el hamiltoniano que da origen a (5.2) tiene la forma

$$E = \int (|\varphi|^2) dx + \int (|\varphi|^2 - \rho_0)^2 (|\varphi|^2 - A) dx = T + V$$

De manera que es sencillo observar con las condiciones anteriores que la ecuación (5.1) se obtiene de la ecuación Hamiltoniana de movimiento

$$i\psi_t = iE, \psi = \frac{\delta E}{\delta \bar{\varphi}}$$

Donde el último término de la ecuación anterior es la variación del hamiltoniano E con respecto

a la variable $\bar{\varphi}$. al exigir que la energía del sistema sea finita, donde el campo φ en el infinito debe satisfacer

$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\psi|^2 = \lambda$
 donde $\lambda = 0, 1, \frac{(2A+1)}{3}$ es una constante que denota a los vacíos (estables e inestables) del potencial, es decir los valores del campo en donde $\varphi = \pm\sqrt{a}$

Como se puede ver, en este cálculo el potencial del modelo tiene una serie finita de vacíos degenerados. Donde el término "Vacío", no significa un estado en el espacio de Hilbert, sino una configuración clásica con energía mínima. Entónces si la energía es finita las soluciones de la ecuación de movimiento conlleva a que los valores sintóticos de $\psi(x)$ debe de coincidir con los mínimos del potencial.

Retomando, la ecuación (5.3) se dice que es un vacío estable para este sistema, con $a = \frac{2A+1}{3}$. Donde las ondas lineales alrededor de este vacío tiene una relación de dispersión de Bogoliubov. que para este caso es:

$$\omega^2 = k^2(k^2 + \frac{4}{3}(A-1)(2A+1)) \quad (5.5)$$

Posteriormente, analizaremos las oscilaciones no lineales en la vecindad del vacío estable φ_0 . Consideramos una solución perturbada de (5.2) de la forma

$$\varphi = \varphi_0 - \phi(x, t) \quad (5.6)$$

con $\varphi(x, t)$ como la nueva función desconocida a ser resuelta. De manera, que se presentan dos nuevas funciones:

$$\psi(x, t) = \phi(x, t) + \overline{\phi(x, t)} \quad (5.7)$$

$$\Phi(x, t) = -i(\phi(x, t) - \overline{\phi(x, t)}) \quad (5.8)$$

siendo los últimos términos de las ecuaciones anteriores, los complejos conjugados. Por otra parte usando estas mismas ecuaciones, en el siguiente sistema

$$\partial_{tt}\psi + \partial_{xx}(\partial_{xx}\psi - 6ab\psi + 6b^{\frac{3}{2}}\psi^2) = 0$$

$$\partial_t = -\partial_{xx}$$

podemos transformar la ecuación (5.1) como una ecuación de Boussinesq de la forma

$$U_{\tau\tau} - U_{\xi\xi} + 6(U^2)_{\xi\xi} + U_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad (5.9)$$

Asumiendo que la perturbación $\phi(x, t)$ es del mismo orden que

$$b = a - 1 = \frac{2}{3}(A - 1) \quad (5.10)$$

De manera, que se cambia la escala de transformación como

$$\tau = 6abt, \xi = \sqrt{6abx}, \psi = \frac{6}{\sqrt{a}}U \quad (5.11)$$

Las variables dependientes e independientes de las ecuaciones (5.9) y (5.2) son relacionadas por la ecuación (5.11). Consecuentemente, para ondas transónicas, la ec. (5.11) puede reducirse a la ecuación KdV

La ECQNLS puede mantener solitones tipo burbuja o tipo oscuro, que presentan un comportamiento interesante para el caso en el que el sistema sale de un estado de vacío triplemente degenerado [26]. Es importante notar que cuando la degeneración del vacío es ligeramente destruida haciendo $A = 2\epsilon$; los solitones tipo burbuja o solitones grises pueden aparecer profusamente alrededor de un vacío cuasi-estacionario φ_0 .

Analizando el comportamiento de los solitones grises, uno puede encontrar que pueden interactuar elásticamente, sin pérdida de energía, además, que se forma un condensado por el lento viaje de los solitones tipo burbuja. Donde usamos el Método de directo de Hirota [34] para encontrar la solución de la ecuación (5.9). Este método es bien conocido, ya que da uno de los rasgos más asombrosos de esto, cuando las transformaciones inversas fallan. De modo que las soluciones solitónicas de la ecuación de Bq que buscamos puede ser representada como:

$$U = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \ln f(\xi, \tau) \quad (5.12)$$

siendo posible escribir la ecuación (5.12) en la siguiente forma bilineal

$$-(f_\tau)^2 + f f_{\tau\tau} + (f_\xi)^2 + f f_{\xi\xi} + 3(f_{\xi\xi})^2 - 4f_\xi f_{\xi\xi\xi} + f_{\xi\xi\xi\xi} = 0$$

considerando que:

$$f = 1 + \alpha e^{\theta(\xi, \tau)}$$

y usando la aproximación estándar de Hirota la función desconocida puede ser obtenida resolviendo la siguiente ecuación:

$$(D_\xi D_\tau - D_\xi^4) f \cdot f = 0 \quad (5.13)$$

donde los operadores D_ξ^m actúan en función de $g(\xi, \tau)$ y $h(\xi, \tau)$ como

$$D_\xi^m D_\tau^n g \cdot h = (\partial_\xi - \partial_{\xi'})^m (\partial_\xi - \partial_{\xi'})^n g(\xi, \tau) h(\xi', \tau') \Big|_{\xi'=\xi, \tau'=\tau}$$

Siendo evidente que la forma bilineal de la Ecuación de Bq pertenece a la clase

$$Q(D_x, D_y, \dots) f \cdot f = 0, Q(0) = 0$$

Para esta clase de ecuaciones, en contraste con U , las soluciones de solitones son realmente simples en términos de f en contraste con U . Este método ha resultado ser bastante eficaz. Después de algunos cálculos, las soluciones multi-solitonicas se puede presentar como

$$f(\xi, \tau) = \sum_{\mu=0,1} \exp' \left[\sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leq i < j}^N \mu_i \mu_j A_{ij} \right] \quad (5.14)$$

$$\eta_i = p_i \xi - \epsilon_i \Omega_i \tau - \eta_i^0, \epsilon_i = +1, \epsilon_i = -1 \quad (5.15)$$

$$\Omega_i = p_i(1 - p_i)^{1/2} \quad (5.16)$$

con

$$\exp' \left[\sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leq i < j}^N \mu_i \mu_j A_{ij} \right]$$

siendo

$$\exp' \left[\sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leq i < j}^N \mu_i \mu_j A_{ij} \right] = \epsilon * \exp \left[\sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leq i < j}^N \mu_i \mu_j A_{ij} \right]$$

y el parámetro ϵ puede tomar dos valores arbitrarios por definición ± 1 . Esto significa que, para construir la solución específica, tomamos sólo uno de los valores disponibles del parámetro ϵ . Con la Velocidad de cada solitón, y antisolitón denotada por $v_i = \Omega_i/p_i$. Donde p_i y η_i son dos constantes reales relacionadas con la amplitud y la fase, respectivamente, del i -ésimo soliton y cumplidos los A_{ij} coeficientes, entonces tenemos:

$$\exp[A_{ij}] = \left| \frac{(\epsilon_i v_i - \epsilon_j v_j)^2 - 3(p_i - p_j)^2}{(\epsilon_i v_i - \epsilon_j v_j)^2 - 3(p_i + p_j)^2} \right| = |a_{ij}| \quad (5.17)$$

Es fácil comprobar también que la velocidad del i -ésimo soliton determina la manera en que pueden viajar por el medio unidimensional, por ejemplo en la fibra óptica. Si bien la solución de solitones habitual de la ecuación normal de Boussinesq (Bq), viaja más rápido debido a que su amplitud es mayor que la del otro, sin embargo el soliton se puede comportar de manera opuesta. En otras palabras, los solitones pequeños deben viajar más rápido que uno de mayor altura. Esto ocurre porque la velocidad de cada soliton toma la forma

$$v_i = \sqrt{1 - p_i^2}$$

5.2.2. Solución para un-soliton gris

De aquí por procedimiento estandar uno puede encontrar las soluciones solitonicas.

Ahora se busca la solución solitonica para la ecuación cúbica-quintica de Schrödinger empleando la integrabilidad de la ecuación Bq. Como es común en física restringimos la parte real $Re\varphi(x, t) = \Gamma(x, t)$ de la solución compleja de $\varphi(x, t)$ de (5.6).

$$\Gamma(x, t) = \psi_0 - Re\phi(x, t) = \sqrt{a} - \frac{\psi(x, t)}{2} \quad (5.18)$$

Teniendo para este caso, la solución solitonica para un soliton gris de la siguiente forma:

$$\Gamma(x, t) = \sqrt{a} - \frac{3b}{4\sqrt{a}} p^2 \left(Sech \left[\frac{p}{2} \sqrt{6ab} \left(x \pm \sqrt{6ab} V t \right) + \ln \alpha \right] \right)^2 \quad (5.19)$$

donde α es el coeficiente de la exponencial en la siguiente expresión

$$f(\xi, \tau) = 1 + \alpha e^{p(\xi + V\tau)} \quad (5.20)$$

y determina la solución de la ec. (5.12).

Ya que la ecuación Bq fue obtenida considerando la estricta restricción (3) tomamos el valor definitivo del parámetro principal $A = 1 + \frac{3}{2}\epsilon$, con $\epsilon \ll 1$. Este valor del parámetro destruye la degeneración del vacío (cuando $A = 1$, donde la energía potencial tiene triple degeneración del vacío) permitiendonos tener dos mínimos locales degenerados, con uno global en el centro del potencial de estos. Este valor del parámetro A encuentra la condición de los valores de las pequeñas amplitudes para oscilaciones no-lineales $|\phi(x, t)| \ll 1$ alrededor del campo vacío estable φ_0 . La solución de un soliton gris para un valor selecto del parámetro A es mostrado en la Fig. 5.

5.2.3. Solución para dos-solitones grises

Por otra parte, la solución de dos-solitones, dada por la función desconocida $f(\xi, \tau)$ de (5.13) asume la forma:

$$f(\xi, \tau) = 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + \exp(\eta_1 + \eta_2 + 2\theta) \quad (5.21)$$

donde $\eta_i = p_i(\xi_i + \delta_i v_i \tau + \eta_i)$, $\eta'_i = \frac{\eta_i^0}{p_i}$, y como es usual $\delta_i = \pm 1$, $i = 1, 2$. Donde p_i y v_i son constantes reales. El coeficiente que juega un papel importante en la obtención de soluciones es:

$$G_{ij} = \pm \exp[2\theta] = \pm \frac{(\delta_i - v_i)^2 - 3(p_i - p_j)^2}{(\delta_i - v_i)^2 - 3(p_i + p_j)^2} \quad (5.22)$$

Como se puede observar para esta expresión, el parámetro G_{ij} puede tener ambos signos positivo o negativo, mientras que la función $f(\xi, \tau)$ satisfacen la ecuación (5.13) para amplitudes y fases del

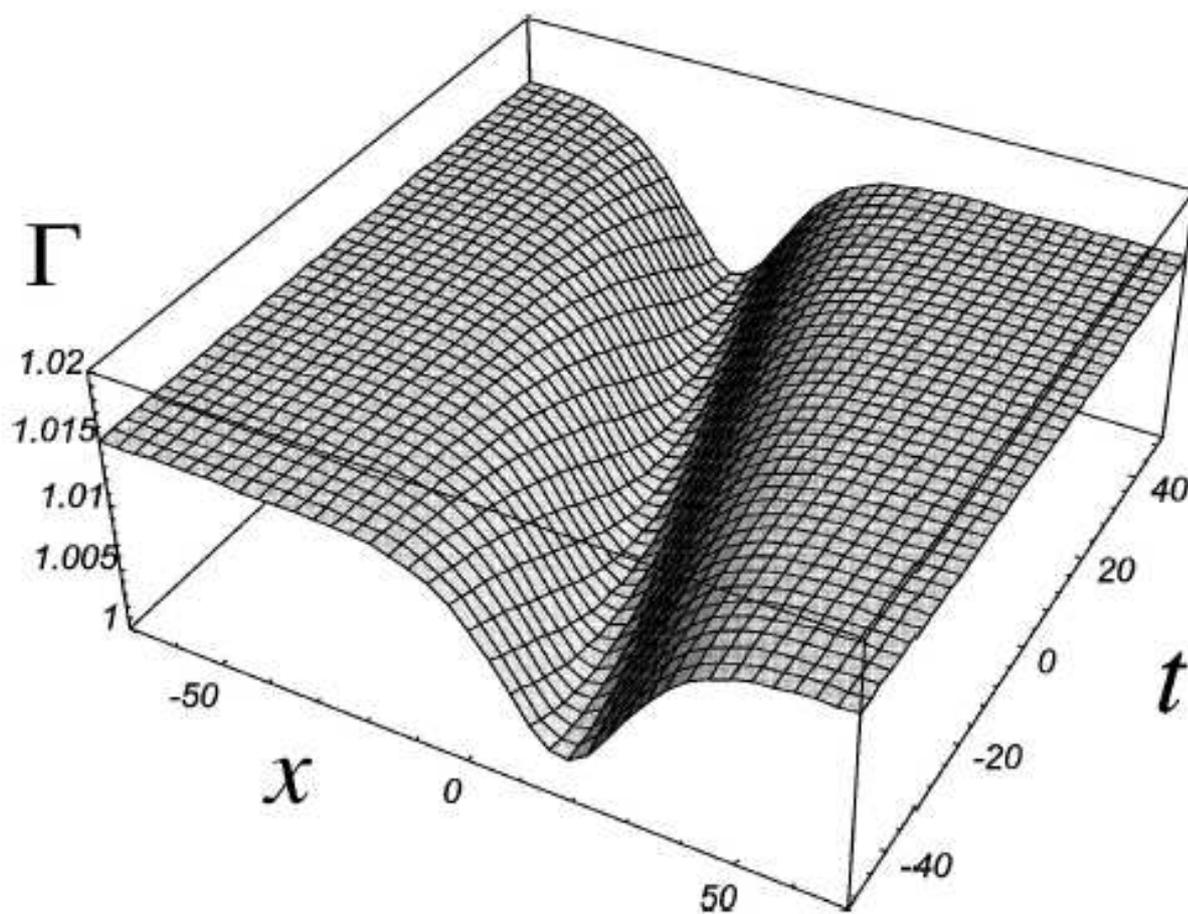


Figura 5.2: Solución solitónica obtenida por medio de la Ec. de Bq. para la ECQNLS, que muestra un solitón gris

i –ésimo solitón. Después sustituimos la función $f(\xi, \tau)$ dentro de la ecuación (5.12), uno puede obtener la solución de dos solitones grises como), uno puede obtener la solución de dos solitones grises como

$$\Gamma(x, t) = \sqrt{a} - \frac{12b \left(p_1^2 \operatorname{Sech}^2 \left(\frac{\eta_1}{2} \right) + p_2^2 \operatorname{Sech}^2 \left(\frac{\eta_2}{2} \right) + (\alpha - 1) \operatorname{Sech}^2 \left(\frac{\eta_1}{2} \right) \operatorname{Sech}^2 \left(\frac{\eta_2}{2} \right) [B(p_1, p_2)] \right)}{\sqrt{a} \left[4 + (\alpha - 1) \left(1 + \operatorname{Tanh} \left(\frac{\eta_1}{2} \right) \right) \left(1 + \operatorname{Tanh} \left(\frac{\eta_2}{2} \right) \right) \right]^2} \quad (5.23)$$

donde $B(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{4} \right) [2p_1 p_2 + p_2^2 (1 + e^{\eta_1}) + p_1^2 (1 + e^{\eta_2})]$ con

$$\alpha = G_{12} = \pm \exp(2\theta)$$

Es fácil verificar que la velocidad del i –ésimo solitón de Boussinesq determina la manera en que puede viajar a lo largo del medio. Mientras que el solitón largo de la ecuación no-lineal usual (por ejemplo en KdV) viaja más rápido que uno corto, para solitones en la ec. (5.1) es lo contrario, un solitón corto debería viajar más rápido que uno largo. Esto por que las velocidades solitónicas son determinadas por la ecuación

$$v_i = \pm \sqrt{1 - p_i^2} \quad (5.24)$$

Similar a lo visto con anterioridad. Consecuentemente, En la ECQNLS un solitón gris estrecho y profundo viajara más rápido que un solitón gris ancho y corto. En el caso particular de $\alpha = 1, p_2 = 0$ la solución de un solitón gris es obtenida por la ec. (5.23).

5.2.4. Solución para tres-solitones grises

Ahora encontraremos la solución para tres-solitones grises. La función $f(\xi, \tau)$ que determina la solución para $N = 3$, acorde a la expresión (5.13) es

$$f(\xi, \tau) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + G_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} + G_{23} e^{\eta_2 + \eta_3} + G_{13} e^{\eta_1 + \eta_3} + \gamma e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} \quad (5.25)$$

Donde $\gamma = G_{12} G_{23} G_{31}$ y G_{ij} son los valores definidos por la ec. (5.22) pero ahora con $i, j = 1, 2, 3$. Subsecuentemente, reemplazando la ec.(5.25) en la solución general (5.12) podemos obtener la solución de tres solitones grises de la ECQNLS (5.1).

Una vez, obtenido las soluciones, cabe mencionar que, las propiedades ópticas No-lineales en una fibra óptica están definidas por las ecuaciones de Maxwell, sobre la base del índice de refracción en términos de $|E|$, y de las correspondientes condiciones de frontera en la interfaz del centro y del revestimiento. Aquí la geometría de la propagación de las ondas solitarias aumenta con el valor de n_4 , visto anteriormente. Entonces, con una fibra monomodo, el quinto orden de dispersión, que representa la distribución de campo radial no-lineal, es siempre mayor que el de tercer orden, lo cual va ser representado con la energía del pulso. Propagándose las ondas solitónicas en el rango del mismo parámetro.

Por otra parte para un solitón gris, la energía de creación dentro de una fibra óptica es muy pequeña en comparación con la creación de un solitón brillante. Por eso para este tipo de solitones la amplitud de campo eléctrico es igual al de una onda solitónica tipo kink, por lo que en una fibra óptica puede ser soportada la entrada y salida de solitones grises, con las condiciones necesarias, mencionadas anteriormente.

5.3. Fase de Un solitón Gris

De acuerdo con la ley de Kerr, la solución compleja de la ENLS, correspondiente a un solitón gris es

$$\psi = \sqrt{q} \left[\sqrt{1 - A^2} - iA \tanh |\sqrt{q}A(q\sqrt{q(1 - A^2)}\xi - \tau)| \right] \exp[iq\xi] \quad (5.26)$$

El cambio total de fase ϕ para un solitón gris en un medio Kerr varia entre 0 y π . Cuando el cambio total de fase es mayor, entonces el solitón es oscuro ($A = 1$) y se propaga perpendicularmente al frente de onda. La limitación en π sobre el cambio de fase del solitón no es solo una peculiaridad de un medio Kerr. Sin embargo, esta no es una restricción en el cambio de fase total del solitón, en algunos modelos del cambio de índice refractivo no-lineal (en particularidad la no-linealidad saturable) que es más general que el caso Kerr,

Para dejar en claro lo propuesto anteriormente se propone un ejemplo en donde se tiene una función $F(s)$, vista en la sección (3.1), donde se describe un medio más general que el medio Kerr. Primero recordamos la ecuación (3.1) que tenia la forma:

$$i\psi_t - \frac{1}{2}\psi_{xx} + F|\psi|^2\psi$$

de forma que haciendo un análisis completo de las propiedades del solitón [sección 5.2] Tomamos un primer modelo el cual es utilizando la Ley Parabólica No-Lineal (Cap. 4) con la función $F(s)$ de la forma de la ec. (4.3)

$$F(s) = s + s^2v$$

donde el coeficiente v como habiamos dicho antes puede tener tanto valores negativos como positivos. De Manera que cuando v es positivo, el indice de refracción cambia fuertemente para un medio Kerr, que es donde existe una dependencia de Intensiadad Superlineal. Para $v < 0$ existe una dependencia de intensidad sublineal. Y cuando $v = 0$ como se habia dicho con anterioridad esto describe el medio Kerr. El cambio de fase total de un solitón gris, para cualquier v , esta dado por

$$\phi = 2 \arcsin \left(\frac{A}{A^2 + (1 - A^2)c} \right) \quad (5.27)$$

Donde el coeficiente c es

$$c = \frac{1 + vs_0(4 - A^2/3)}{1 + vs_0(1 - A^2/3)}$$

Por otro lado si queremos ilustrar las propiedades de fase del solitón, utilizamos el plano complejo que describe lo real y la parte imaginaria de la amplitud de campo modificado $\psi(\tau, \xi)e^{-iq\xi}$. Cualquier solución de la ecuación (3.1), en la forma de un solitón puede representar en este plano por alguna trayectoria (una curva paramétrica fijada en ξ con τ como un parámetro). Por ejemplo estas trayectorias para el caso Kerr, la no-linealidad parabólica y los modelos con índice de saturación se muestran en la Figura(5.4).

El estado base de los solitones grises en cada caso es una solución de la ec. (3.1) en la forma de una onda plana

$$\psi = q_0 \exp iF(q_0^2)\xi + i\phi_0 \quad (5.28)$$

donde ϕ_0 es la fase del estado base. Para la Ley de Kerr, esta se reduce a $\psi = \sqrt{a_1} \exp[ia_1\xi]$ con $q_0 = \sqrt{a_1}$, como se mostro anteriormente. La fase ϕ_0 es arbitraria pero las fases estan relacionadas las fases sobre la imagen, para un solitón oscuro (ver ref.[7]). Aquí, el solitón en estado base sobre un plano complejo esta localizado en cualquier lugar sobre un círculo con radio q_0 . Por simplicidad tomamos a $q_0 = 1$ en todas las figuras. La variación de la amplitud del solitón y la fase son mostrados sobre el plano complejo por una curva que esta localizada dentro del círculo, y que inicia y termina dentro del círculo. Estos dos puntos corresponden a la amplitud del estado base para $\tau \rightarrow \infty$ y $\tau \rightarrow -\infty$. El cambio total de fase a través de los perfiles del solitón estan dados por un ángulo anclado al origen por los puntos inicial y final. Para la no-linealidad de Kerr representada en la figura (5.4a) por una línea recta. La distancia de máxima aproximación al origen corresponde a la raíz cuadrada de la intensidad mínima. En contraste, A^2 , aumenta, entonces la línea se mueve hacia el origen y el cambio total de fase de los solitones aumenta hasta llegar a π para un soliton oscuro.

Cuando el término vs^2 se aumenta a la no-linealidad Kerr, ec. (4.3), la trayectoria en un plano complejo no es una línea recta. (Fig.5.4b). Con un mismo contraste, se tiene sólo un punto en común con la línea recta que representa el caso de Kerr, ya que éste es una tangente a la curva. Una característica interesante de esta curva, es que su curvatura depende del signo de la constante v . De modo que definamos el signo de la curvatura de la curva como positivo, si la curva se inclina hacia el interior (con respecto al origen) de la recta tangente y negativo si se dobla hacia el exterior. Así, la curva mostrada en la fig. (5.4b) tiene curvatura positiva cuando v es menor que cero y la curvatura negativa cuando v es positivo. En consecuencia, el cambio total de fase depende también del signo de contraste en la A^2 . Como la diferencia de enfoques de la unidad (el caso de un solitón oscuro) disminuye la curvatura: la curvatura poco a poco se convierte en una línea recta y el cambio de fase total va a π . Por lo tanto, π es el cambio de fase limitante para solitones cuando la no-linealidad esta

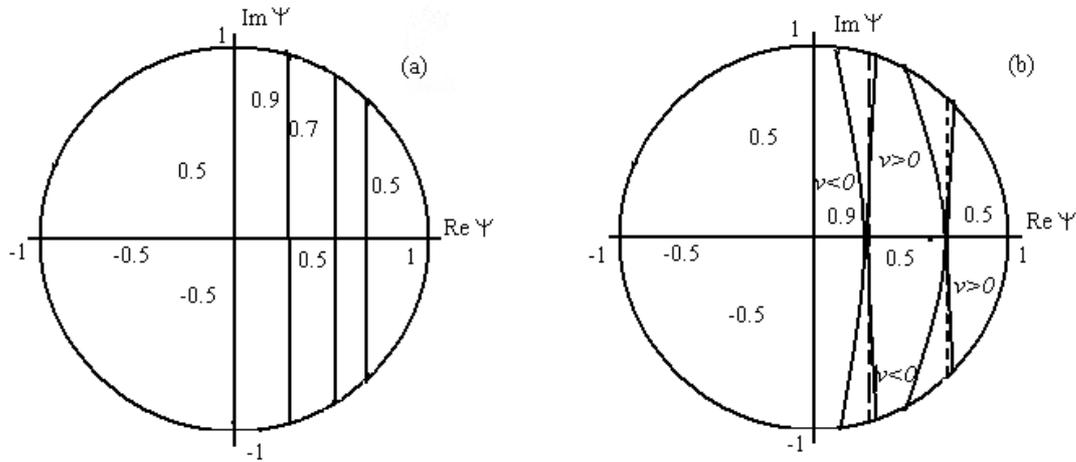


Figura 5.3: Trayectorias en el plano complejo para solitones grises resultado de: (a) No-Linealidad tipo Kerr. (b) No-Linealidad Parabólica

dada por la ecuación (4,3). Esto también puede ser visto a partir de la ecuación (5.29). La gráfica de la fig. (5.4b) muestra la relación entre la curvatura de la trayectoria y el signo de v .

5.4. Clasificación de la Interacción Solitónica

La clasificación de la interacción solitónica puede ser analizada en un sistema común de dos y tres estructuras solitónicas. Por simplicidad denotamos el parámetro α de la ec. (5.13) y γ de la ec. (5.25) por el símbolo común σ . Analizando ahora las posibles características de los solitones grises dentro de la dependencia del parámetro σ .

1. $\sigma > 0$. Los parámetros de velocidad satisficieran las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} v_i^2 + v_j^2 - \frac{1}{2}\delta_i\delta_j v_i v_j - \frac{3}{2} &> 0 \\ v_i^2 + v_j^2 - \frac{1}{2}\delta_i\delta_j v_i v_j - \frac{3}{2} &< 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Los signos $\delta_1\delta_2$ muestran como se mueven las interacciones solitónicas. Si esto es positivo, tenemos ondas viajando en dirección igual y para el valor negativo (-1) tenemos solitones moviéndose en dirección opuesta. El caso opuesto; $\sigma < 0$ muestra singularidades solitónicas que podemos evitar.

Para ambos casos de arriba, las soluciones solitónicas después de la interacción cambian de fase. Esto significa que los cambios de fase solitónicos de η_i^0 a $\eta_i^0 + \ln |\sigma|$ y el total de cambios de fase

para los otros $2(3) - 1$ solitones es $\ln|\sigma|$. Como podemos notar fácilmente, el total de cambios de fase desaparece. El factor que posiciona dos solitones después de colisionar no coincide con las posiciones que puedan tener si existe el otro soliton, lo que nos dice que cada uno de ellos tenga un cambio de fase. El máximo en las colisiones no es igual a la suma de los dos máximos de solitones individuales antes de colisionar.

Aparentemente cambian energías y momentos sin radiación. Cuando $G_{ij} > 0$, se evitan singularidades.

2. $\sigma = 0$. Tenemos en este caso la interacción resonante de solitones [6,7,8,9,10]. En este caso, observamos interacción resonante de solitones grises. Este comportamiento ocurre cuando los parámetros relevantes tienden a satisfacer la ecuación

$$\delta_i v_i - \delta_j v_j \pm \sqrt{3} \left(\sqrt{1 - v_i^2} - \sqrt{1 - v_j^2} \right) = 0 \quad (5.30)$$

Para dos interacciones solitónicas tenemos dos valores de subíndices $i = 1$ $j = 2$. en la ecuación (5.29), entonces se tiene que: $p_r = p_1 \pm p_2$, y $\omega_r = \omega_1 \pm \omega_2$ con $\omega_i = \delta_i \sqrt{1 - p_i^2} \cdot p_i$ y la fase $\eta_r = p_r(\xi_r + \delta_r v_r t + \eta'_r)$, donde el subíndice r implica la condición de resonancia.

Por lo tanto, la ecuación (5.25) es transformada dentro de una combinación lineal de exponentes que producen interacción resonante. Dos solitones pueden colisionar inelásticamente formando un soliton gris "virtual".

Para el caso de tres solitones la interacción inelástica es ligeramente más interesante. De hecho, si uno de los parámetros a_{ij} desaparece, entonces $\gamma = 0$. Sin embargo, los otros dos pueden tener valores arbitrarios. Esto significa que dos solitones grises podrían colisionar inelásticamente para formar un soliton que interactúa con un tercero elásticamente. Otro rasgo interesante puede ser observado cuando dos a_{ij} son iguales a cero mientras que el tercero no es cero. En esta ocasión, la imagen es similar a la bien conocida para la interacción dos-solitónica. Cuando todos los $a_{ij} = 0$ para resolver aproximadamente el sistema (5.30), uno puede encontrar que tres solitones grises pueden colisionar inelásticamente para formar únicamente un soliton después de la colisión. Esto representa la condensación o la fusión de burbujas o solitones grises. En el caso de usar los diagramas del contorno de estas soluciones, significa lo siguiente: los rayos amplios corresponden a las burbujas pequeñas mientras que las estrechas bandas a los grandes solitones grises.

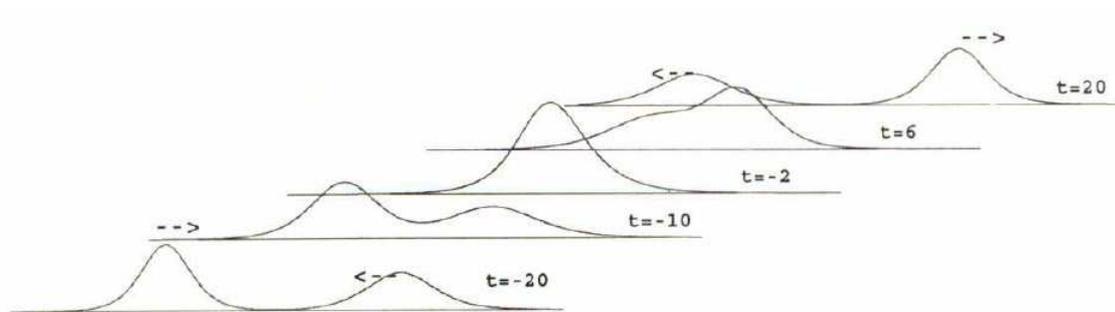


Figura 5.4: Interacción de dos solitones regulares. Si uno de ellos tiene velocidad mayor, entonces su amplitud correspondiente será menor con respecto a la que posee el otro solitón

Capítulo 6

Conclusiones

Como parte del trabajo se hizo un análisis extenso de las soluciones para una onda solitónica (comunmente llamada "Soliton"), encontradas en la ECQNLS. Donde principalmente se vio el caso de la No-Linealidad tipo Kerr y la No-Linealidad Parabólica, haciendo un caso especial para la solución de un soliton gris en la ECQNLS, teniendo en cuenta como se produce un solitón dentro de una fibra óptica bajo las condiciones necesarias expuestas principalmente en el capítulo quinto, mismo en el que se muestran los patrones de estabilidad de propagación del pulso óptico.

De modo que al considerar la propagación de un pulso óptico en un medio, caracterizado por tener una linealidad de alto orden. Se propuso un modelo muy conveniente, para el estudio de ondas solitónicas en dos y tres dimensiones, el cual por casos de auto-enfoque colapsa, pero se evita este colapso tomando una forma unidimensional la ecuación generalizada de Schrödinger, la cual se ve como una relación de dispersión, donde se considera una función tipo anzats, para obtener la solución de la misma, teniendo en cuenta la susceptibilidad del medio Kerr. Teniendo en cuenta que la no-linealidad del efecto Kerr, es debida a la dependencia del índice de refracción de la fibra sobre la intensidad del campo. Con la intensidad del índice de refracción dando lugar a un gran número de efectos no-lineales.

También se describieron los tres tipos de soluciones en una forma unificada en la que sus parámetros se expresan en función de la energía del pulso. Esto le permite darse cuenta de que, debido a la no linealidad de quinto orden en una fibra, los solitones brillantes y grises pueden propagarse en el rango del mismo parámetro. Lo que no pasa con los solitones negros las cuales son soluciones muy diferentes por un valor crítico de la intensidad del campo en el fondo y se pueden propagar con energías de diferentes longitudes de onda e intensidades de fondo.

Siendo que para la ECQNLS se analiza la ley parabólica no-lineal donde la susceptibilidad de alto orden va relacionada con los índices de refracción de los medios no-lineales, mostrando claramente la

formación del pulso óptico centrado bajo la influencia de una intensidad máxima. Observando que, para la ley parabolica el índice de refracción cambia más fuertemente cuando el valor de ν es positivo que para un medio Kerr, por lo que se dice que tiene una dependencia de intensidad superlineal.

Por lo que, podemos ver la existencia de solitones grises con la variación de la ecuación (5.1) haciendo la transformación a la ecuación (5.2) debido a la intensidad del pulso que atraviesa la fibra óptica.

Por lo que la estabilidad de la solución estacionaria va depender del signo de ν , para el caso de la dispersión normal, con $\nu < 0$, por lo que tenemos soluciones para las perturbaciones que presentan una amplitud constante, dadas las condiciones de la solución estacionaria que se considera estable a pequeñas perturbaciones. Observando una buena transferencia de información a través de la fibra óptica.

Podemos decir que, en el modelo de la ECQNLS pueden surgir solitones tipo burbuja o solitones grises con comportamientos de interacción cuando el sistema esta surgiendo para un estado con tres vacios degenerados. Esto es sobresaliente si destruimos ligeramente esta degeneracion (haciendo $A = 1 + \frac{3}{2}\epsilon$), los solitones tipo burbuja o solitones grises pueden aparecer profundamente alrededor del vacio Cuasi-estable φ_0 . Analizando el comportamiento de solitones grises uno encuentra que pueden interactuar elasticamente sin perdida de energía y además pueden condensarse formando burbujas que viajan lentamente.

Es posible mostrar que la creación y/o aniquilación de solitones grises con solitones singulares y viceversa ocurre durante su interacción. Es seguro detectar que esta imagen es muy similar al caso de interacción de particulas elementales. De hecho, la colisión de dos solitones singulares formando dos solitones regulares se asemeja a la aniquilación de dos “particulas” mientras se crean otras dos “particulas” y viceversa. Para el caso de dos solitones, unos singulares aparecen cuando $a_{ij} < 0$ en la ec. (5.21). Sobre este requerimiento, los valores de p_i satisfacen a: $p_i p_j > 0$ o $p_i p_j < 0$. Esto significa, que los $p_i = \pm\sqrt{1 - v_i^2}$ deben ser tales que las velocidades correspondientes v_i no satisfacerán el sistema (5.25).

En el surgimiento de solitones singulares para el caso de tres solitones, el valor de γ en la ec. (5.24) debe ser negativo. Para este caso, uno puede construir ocho combinaciones de a_{ij} ($i \neq j = 1, 2, 3$) que produce γ . Se ve fácilmente que cuatro de ellos son responsables de producir solitones singulares debido a su signo negativo.

Por otra parte, para la relación de las soluciones de un solitón gris en la ECQNLS, dentro de una

fibra óptica, se toman en cuenta las características que describen la propagación del solitón dentro de la misma, debida debida a la saturación de la no-linealidad, en el campo óptico.

Bibliografía

- [1] Erick Flores. Máximo Agüero. Solitones singulares y regulares en la ecuación no lineal de Kadomtsev-Petviashvili.. Ciencia Ergo Sum. Vol. 5. Número tres. Noviembre 2001-Febrero 2002.
- [2] Alejandro Pérez R. Alvaro Rugeles P. Soluciones Multisolitónicas de la Ecuación NLS. Revista Colombiana de Física, Vol 38, No.2. 2006.
- [3] M.A. Agüero-Granados. Auto interacción de sexto orden en teoría no lineal de campos. Revista Mexicana de Física, 44(1) 82-91. Febrero 1998.
- [4] Lui Lam. editor. Introduction to Nonlinear Physics. Springer. 1997
- [5] Hasegawa. Matsumoto. Optical Solitons in Fibers. Springer 2002.
- [6] J. Fujiota. R.F. Rodríguez. A. Espinosa Cerón. Solitones embebidos: estables, inestables, continuos y discretos. Ciencia Ergo Sum. Noviembre febrero. Año/Vol. 13, número 003. 2006.
- [7] Nail N. Akhmediev and Adrian Ankiewicz. Solitons. Nonlinear pulses and beams. Chapman and Hall. 1997.
- [8] Spyridon Kamvissis Kenneth D. T-R McLaughlin. Peter. D. Miller. Semiclassical Soliton Ensembles for the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation.. 2003. Princeton
- [9] Juan E. Nápoles Valdéz. Arturo González Thomas. Solitones, una no-linealidad no tan solitaria. Revista virtual Matemática, Educación e Internet. Enero 2006.
- [10] Ray-Kuang Lee. Yinchieh Lai. Boris A. Malomed. Quantum Fluctuations around Bistable Solitons in the Cubic-Quintic nonlinear Schrödinger equation. February 2008.
- [11] R. Hirota. The Direct Method in Soliton Theory. Cambridge University Press. (2004)
- [12] R. Carreta-Gonzalez. J.D. Talley. C. Chong. B. Malomed. Multistable Solitons in the Cubic-Quintic Discrete Nonlinear Schrödinger Equation. Physic. D. (2005) Elsevier Science.
- [13] Anjan Biswas. Swapan Konar. Introduction to Non-Kerr Law Optical Solitons. Chapman and Hall/CRC. (2006)

-
- [14] Stoyan Tariav. Dimitar I. Pushkarov. Solitary Wave Propagation and Bistability in the Normal Dispersion Region of Highly Non-linear Optical Fibers and Wave Guides. *Optics Communications* 141.(1997)[322-328] 15 September 1997. Elsevier.
- [15] V.E. Zakharov, A.B. Shabat: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 61, 118 (1971) (Trans. Sov. Phys. JETP Lett. 34,62 (1972))
- [16] A. Hasegawa. Y. Kodama. *Solitons in Optical Communications*. Oxford University Press. Oxford (1995)
- [17] A. Hasegawa. "A Historical Review of Application of Optical for High Speed Communication Chaos; Vol. 10 Issue. 475,488. (2000)
- [18] A. Hasegawa. "Theory of information Transfer in Optical Fibers: A Tutorial Review". *Optical Fiber Technology*. Vol. 10, 2,150-170. (2004)
- [19] A.C. Newell. J.V. Moloney. *Nonlinear Optics*. Addison-Wesley-Redum, City, C.A. (1989)
- [20] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fibers Optics*. Elsevier Science. North Holland (2001)
- [21] Y. S. Kiushar. G.P. Agrawal. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. Academic Press. Boston (2002)
- [22] M. Ablowitz. H. Segur. *Solitons and The Inverse Scattering Transform*. SIAM. Philadelphia (1985)
- [23] C. Sulem. P.L. Sulem. *The NonLinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*. Springer. New York (1996)
- [24] L. Vazquez., L. Streit, Victor M. Pérez García. (ECs) *NonLinear Klein-Gordon and Schrödinger Systems: Theory and Applications*, World Scientifics Singapour (1996)
- [25] A. Biswas. *Optical Solitons: Quasi-Stationary Optical Solitons with Parabolic Law Nonlinearity*. *Optics Communications*. Vol. 216, Issue 4-6, (2003)
- [26] M. Agüero. A Note on Grey Solitons of the Cubic-Quintic Schrödinger Equation. 2000.
- [27] A.I.Manistov, A.M. Basharov. *Nonlinear Optical Waves*. Kluwer Academic Publishers Dordrecht Boston London. 1999
- [28] J.Ginebre. G. Velo. On a Class of Nonlinear Schrödinger Equations. II Scattering Theory, General Case. *Math. Z.* 170 (1980) 109, 136.
- [29] G.P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Optics and Photonics. Third Edition. (2001)
- [30] E. Cabrera. S. Gonzalez. J. Fujioka. *Sistema Dinámico Escondido en una Ecuación con Solitones Embebidos*. (2005)

-
- [31] L. Khaykovich et al., *Science* 296 (2002) 1290.
- [32] K.E. Strecker, G.B. Partridge, A. Truscott, and R.G. Hulet, *Nature* 417 (2002) 150.
- [33] V.G. Makhankov, *Soliton Phenomenology* (Kluwer, Dordrecht,1990).
- [34] R. Hirota in *Solitons*, R.K. Bullough and P.J. Caudrey Eds.(Springer-Verlag Berlin 1980) p. 120.
- [35] A.S. Davydov, *Biology and quantum mechanics* (Pergamon,London, 1982).
- [36] T. Hwa, E. Marinari, K. Sneppen, and L-H Tang, *P. Natl.Acad. Sci. (USA)* 100 (2003) 4411.
- [37] C.A. Jones and P.M. Roberts, *J. Phys A* 117 (1982) 175.
- [38] D.E. Pelinovsky, Yu. S. Kivshar, and V.V. Afanasjev, *Phys. Rev.* 54 (1996) 2015.
- [39] E. Villagrana , J. Bernalb , and M. Aguero. On the stabilization of bubble solitons.*Revista Mexicana de Física.* 51(6)580-584,2005
- [40] D.L Pushkarov, S. Tanev, *Optics Comm.* 124 (1996) 354; D. Pushkarov. S. Tanev, LAMP Series Report LAMP/95/5, International Centre for Theoretical Physics, Miramare-Tri-este; S. Tanev, D.L Pushkarov, in: *Fabrication, Properties and Applications of Low-Dimensional Semiconductors*, NATO ASI Series, 3. High Technology, Vol. 3, Eds. M. Balkanski, I. Yantchev (1995) p. 311.
- [41] Kh.L Pushkarov, D.L Pushkarov, LV. Tomov, *Opt. Quantum Electron. II* (1979) 471; Kh.L Pushkarov, D.L Pushkarov, *Rep. Math. Phys.* 17 (1980) 37.
- [42] B.L. Lawrence, M. Cha, W.E. Torruellas, G.L Stegeman, S. Etemad, G. Baker, F. Kajzar, *Appl. Phys. Lett.* 64 (1994) 2773; B.L. Lawrence, W. Torruellas, G. Stegeman, *Optics Lett.* 20 (1995) 2481.
- [43] V.M. Malkin. *Physica D* 64 (1993) 251; M. Karlsson, *Phys. Rev. A* 46 (1992) 2726; V.E. Zakharov, V.V. Sobolev, *Synakh, Sov. Phys. JETP* 33 (1971) 77.
- [44] S. Gatz, J. Herrmann, *J. Opt. Soc. Am. B* 8 (1991) 2296.
- [45] S. Cowan, R.H. Enns, S.S. Rangnekar, S. Sanghera, *Can. 1. Phys.* 64 (1986) 311.
- [46] J. Herrmann, *Optics Comm.* 87 (1992) 161.
- [47] Kh. Pushkarov, M.T. Primatarowa. *Phys. Stat. Sol. (b)* 123 (1984) 573; M.T. Primatarowa, *Phys. Stat. Sol. (b)* 156 (1989) K125.
- [48] D.L Pushkarov, *Quasiparticle Theory of Defects in Solids* (World Scientific, Singapore, 1991) Ch. VI.
- [49] J. Herrmann, *Optics Comm.* 91 (1992) 337.

-
- [50] G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, Boston. 1989).
- [51] A.D. Boardman, A. Shivarova, T. Popov, S. Tanev, D.Zyapkov. *J. Mod. Optics* 39 (1992) 1083;
A. Shivarova, S.Tanev, *Pure Appl. Optics* 3 (1994) 725.
- [52] R. Rajarman. *Solitons and Instantons*. North-Holland Publishing Company. (1982)
- [53] M. González Herráez. *Desarrollo de técnicas no lineales para la medida de la distribución longitudinal de dispersión cromática en fibras ópticas monomodo*. Universidad Politécnica de Madrid. 2004.